目　　录

第一章　数与形概念的演进及其矛盾分析

数与形是数学中两个最基本的概念。这两个概念是从现实世界的有关量的关系中直接或间接地逐步抽象出来的，而现实世界又充满着矛盾，因此，它们也必然充满着矛盾，具有深刻的辩证性质。

一、　数概念的演变及其矛盾性

1.数概念的演变

(1)自然数的产生

恩格斯指出："数学是从人的需要中产生的"。[1] 作为数学最基本概念之一的数也不例外，它是原始人类根据生活的直接需要，在长期的实践中逐步形成的。事实上，数(shù)的概念发源于数东西的数(shǔ)。在原始社会里，人类以狩猎、捕鱼和采果为生。因而，过着集群生活的人们，为了满足食物的需要，势必要顾及到人数、工具和收获物多少的问题。例如，要把已有的工具分配给猎人，就有一个够分不够分的问题。当时人们还不知道用数(shǔ)的办法进行比较，只是采取把工具一件一件地分给猎人来判断人和工具哪个多、哪个少。同样，打猎回来后，将猎获的野兽分给大家，又遇到了够分不够分，即人与野兽哪个多、哪个少的问题等。人们就是在这样的无数次比较中，渐渐萌发了"多"和"少"的观念。但这时人们尚不知

1)《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

道"多"与"少"是具体事物集合的一种特征，还没有形成抽象的数的概念。

后来，在"屈指可数"的情况下，人们逐步学会以对应的方式，用人的手指来数(shǔ)某个事物集合中事物的多少。比如，一个事物就用一个手指来对应，五个事物就用五个手指来对应。古人用"手"表示"五"，用"整个人"表示"二十"，就是把集合中的事物数与一个人所有的手指、脚趾总数建立起对应关系，以说明事物数与若干个手指、脚趾的总和那样多。我国古代曾用"|、||、|||、||||、|||||"或"一 二、三、亖、☰"来表示"一、二、三、四、五"。也有些国家曾用罗马数字"Ⅰ"表示"一"，"Ⅴ"表示"五"，"Ⅹ"表示"十"。许多国家早已使用并一直延续到今天的十进制的记数法。从这些事实中可看出人类最初用手指数(shǔ)数的历史印迹。人们能用手指这样一种具体事物来对应其它各种事物以表示多少，这比起最初人们只会用相互搭配的办法来比较两种事物的多少，是一个很大的进步。但是，这时人们还没有从具体事物中抽象出"数"这个概念。

经过长期的实践，人们逐渐认识到各种事物集合在量上具有共同的特征。比如，三头羊、三条鱼、三只鸡、三个梨、三朵花、三棵树，等等。虽然是一些不同的东西，但它们在量上都有着共同的特征，即都是"三"个东西。又比如，一头羊增加一头羊是两头羊，再增加一头羊就是三头羊；同样，一条鱼增加一条鱼是两条鱼，再增加一条鱼就是三条鱼……，它们在量上有一个特征，即都是"一"个东西增加"一"个东西是"二"个东西，再增加"一"个东西就是"三"个东西。久而久之，人们便从各种不同的具体事物集合中抽象出量的共同特征，即舍弃事物的具体内容而得到抽象的数。后来，人们又引入了数字符号和十进位制记数法。于是，人们由一个东西增加一个东西得二个东西，再增加一个东西得三个东西，依此类推，可得一系

列数：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10……。有了它，人们就可以利用它数(shǔ)出任何一个事物集合中元素的多少。这样，人类对数的认识便从感性认识上升到理性认识，发生了质的飞跃，从而抽象出了自然数概念。正如恩格斯指出的那样："数和形的概念不是从其它任何地方，而是从现实世界中得来的。人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物。为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。"[1]

(2)有理数的建立

人们有了自然数的概念之后，可以解决生产和生活中的一些问题，但由于人类实践的发展，认识的深化，又感到只有自然数是不够用的。例如，人们在建筑房屋、制造工具和丈量土地等实践中，遇到了大量的测量问题。而在测量中，又往往出现用事先规定的单位长度不能正好量完的情况。于是，只有自然数概念就显得不够用了，便产生了分数概念。

事实上，当人们用一个单位长(如一尺)去量某物体，结果量三次后还余一小部分(不够一尺)。起初，人们就大概地说三个单位(三尺)多一点。但后来生产要求精确度越来越高，上述的近似值就不适应了。这时，人们为了满足实际中精确度的要求，自然想到把单位再缩小一些，如将原单位缩小一半，作为新单位再去量。若正好量完，问题就解决了。若仍不能够正好量完，就再把单位缩小一半，作为更新的单位再去量，……。这样，便逐渐认识了1/2，1/4，……等形如$1/n$($n>1$的自然数)的分数。据史料记载，古代巴比伦人已应用60、60^2、60^3为分母

1)《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

的分数，还编制了用60进位的分数来表示分子是1的分数表。古埃及人遇到象3/4这样的分数便束手无策，但是，他们却能对分子为1的分数进行简单运算。例如，把3/4写成1/2和1/4之和，并把分子不是1的分数统统化成分子是1的分数和，还列出了相应的表[1]。后来，由于实际的需要，才出现了3/4、5/7……等形如m/n($n>1$的自然数，m为自然数)。我国古代数学名著《九章算术》中，不仅记载了分数概念，而且还系统地叙述了分数的算法，这在世界数学史上占有极其重要的地位。由上可见，所谓"分数概念来源于分"是不无道理的。

分数概念的形成，在实践中解决了不能正好量尽的矛盾。在数学上，解决了在自然数集合范围内，除法不能畅通无阻的矛盾。随着生产的发展，人们对数的认识又加深了，引入了"零"的概念。

"零"概念的产生，与采用十进位制记数法有着密切的关系。在这种记数法中，每个数所代表的多少，一方面与数字本身有关，另一方面又与它在什么位置上有关。比如"2"在个位上表示"2"，在十位上则表示"20"，若在百位上则表示"200"，……。这就是所谓要知数之多寡"先识其位"的道理。使用这种记数法，当某一位上一个单位也没有时，由于不能用1、2、3、……、9等数字符号来表示，因而就出现了"空位"。为了表示这样的"空位"，古代人们想了许多办法。印度人大约在六世纪时，曾用"·"表示"空位"，到了九世纪，又将"·"改为"〇"。我国早在北宋之后，当用算筹计数时，就用"口"来表示"空位"，以后又改用"0"。这样，"零"的概念便在实际计算的推动下开始形成。

自然数、分数和零是算术的基本概念，通称为算术数。

---

1) 参见余元希：《数的概念浅说》，上海教育出版社，1980年版，第31页。

有了算术数，人们可以解决一些简单的实际问题。但随着生产和人们认识的发展，又发现，有些实际问题仅用算术数是解决不了的。比如，一些具有相反意义的量，像卖出与买入，盈利与亏损，上升与下降，增加与减少，向南与向北，前进与后退等等，只有算术数是无法表示的。为了解决这些问题，人们又引进了负数的概念。

据史料记载，中国古代的《九章算术》中的“方程”章里，就引入了正负数的概念，如记有以卖出为正，买入为负；余款为正，欠款为负等。刘徽（约225—295）在《九章算术注》中明确指出：“今两算得失相反，要令正负以名之。”大约在西汉时期（公元前二世纪），就用赤筹表示正，用黑筹表示负；或用三角形截面的算筹表示正，矩形截面的算筹表示负。[1]

负数概念的引入，并非一帆风顺。起初，在解方程中得到负根时，人们要么否认，要么回避。古希腊数学家丢番图（Diophantus，约246—330）就曾把方程的负数解说成是“荒唐的东西”[2]而加以舍弃。我国唐朝数学家王孝通（六至七世纪）的《缉古算经》，仅讨论正系数的方程，且只求出一个正根。十二世纪，印度数学家巴斯卡拉在解方程时求出负根，但以“不合宜”为由不予承认。十六世纪，法国数学家韦达（F. Viete，1540—1603）也不取负根。然而，在实践的推动下，负数作为正数的补充，解方程时出现负根的情况，逐渐得到人们的公认。

正整数（自然数）、负整数、正分数、负分数和零，统称为有理数。这样，人们对数的认识便从自然数发展到了有理数。

（3）实数的形成

在有理数的基础上，人们又引入了无理数。而有理数与无理数统称为实数，于是数的概念便从有理数扩展到了实数。

1）参见李俨：《中国数学大纲》，商务印书馆，1931年版，第36页。

2）李约瑟：《中国科学技术史》第三卷（数学），科学出版社，1978年版，第200页。

那么，无理数是怎样引入的呢？

在实际度量中，原先人们认为，只要单位取得充分小，总可以把两个量(如线段长)同时量尽，或令一个量为单位，则另一个量总可表成两个正整数m与n之比：m/n。可是，后来人们发现，像正方形的对角线的长与边长之间就找不到适当小的单位把它们同时量尽。或者说，若令正方形的边长为单位，那么，对角线的长度无法表示成为m/n(m、n均为正整数)的形式。实际上，根据勾股定理，正方形一对角线的长与其边长之比不是一个分数，而是$\sqrt{2}$。亦即正方形边与对角线是两个不可公度线段。[1]

由上面的讨论可知，某量与另一被取做单位的量之比，如果用数来表示，其结果则会出现两种情况：第一，当它们是可公度时，其结果是整数或分数，而此分数可表示为有限小数或无限循环小数；第二，当它们是不可公度时，其结果既不是整数、有限小数，亦不是无限循环小数，而是无限不循环小数。可见，表示可公度线段的长度只要用有理数的概念就可以解决。但是，要表示不可公度线段的长度，用有理数的概念就行不通了。为了解决这个矛盾，人们就把整数、有限小数和无限循环小数称为"有理数"，而把无限不循环小数称为"无理数"。这样便引入了"无理数"的概念。无理数在英文中是"irrational number"，是从拉丁文和希腊文直译过来的，其中"irrational"的字义是"无比值的"。因此，就本来的意义，无理数是表示与测量单位无比值的线段长度之数。当然，无理数的引入，也是突破有理数的局限，解决数学中开方(如$\sqrt{2}$)开不尽矛盾的结果。据史料记载，无理数概念的引入，曾经历了相当长的历史时期。

1）如果两个线段不存在一个适当的单位线段，可把它们同时量尽，那么就称这两个线段为"不可公度线段"。

早在公元前，人们就遇到了像$\sqrt{2}$、π等这样的无理数，但真正建立起严格的无理数概念，并把数的系统扩展到实数，那是十九世纪的事。

(4)复数的确立

有了实数概念，人们就解决了过去仅有有理数概念时所不能解决的不可公度和开方开不尽等矛盾。但后来随着生产实践的深入发展，又产生了新的矛盾，如负数开平方是什么？众所周知，在实数范围内，任何一个正数或负数的平方都得正数，或者说，没有一个数的平方会等于负数。因而，负数开平方(如$\sqrt{-1}$)已超出实数范围。与实数相比较，当时人们把这样的数称之为“虚数”，以示“不存在”、“虚无”的意思。后来，人们经过长期实践逐步认识到，“虚数”并不虚无，还把虚数与实数的复合形式$a+b\sqrt{-1}$(a、b为实数)称为复数。于是，在数的概念中，又引进了复数概念，数的系统得到了再一次的扩展。

“虚数”概念的确立，是一个漫长而曲折的过程，大体可分为以下几个阶段：

第一，问题提出阶段。早在公元前，在解决生产实际问题时，人们就遇到了负数开平方的问题，例如，解方程$x^2+1=0$时，就出现了$x=\pm\sqrt{-1}$。当时，人们认为方程无解，便回避了它。后来在解决从实践中提出的三次方程时，又遇到了负数开平方。例如，公元七世纪，我国唐代的《辑古算经》中，就有三次方程问题及其解法。但一直到十六世纪以前，无论是我国还是外国，虽然研究并解决了许多三次方程问题，但对负数开平方问题仍采取回避的态度。就是说，问题是提出来了，但没有解决。

第二，理论探讨阶段。到了十六世纪，人们已获得了三次方程的一般求解公式：对$x^3+px+q=0$(p、q为实数)，有

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad (\text{I})$$

后来，人们发现，某些三次方程有实根，但用公式(Ⅰ)求不出实根，于是出现了矛盾。例如，$x^3-15x-4=0$，显然有实根$x=4$。但应用公式(Ⅰ)，则得

$$x=\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}+\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-15)^3}{27}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}-\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-15)^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \quad (\text{II})$$

如何解决这一矛盾？当时，人们从理论上进行了探讨，充分发挥了辩证思维的能动作用。例如，1572年，意大利数学家邦别利(R·Bombelli, 1526—1572)，从$(\sqrt{-1})^2=-1$出发，证得

$$\begin{cases}2+11\sqrt{-1}=(2+\sqrt{-1})^3\\ 2-11\sqrt{-1}=(2-\sqrt{-1})^3\end{cases} \quad (\text{III})$$

将(Ⅲ)代入(Ⅱ)，得

$$x=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}$$

$$=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}$$

$$=4$$

这样，就解决了用公式(Ⅰ)求不出实根的矛盾。不仅如此，还逐渐建立了关于虚数的一些运算法则。虚数开始得到人们的承认。

第三，实践检验阶段。　有了虚数概念之后，人们在理论

上把数的概念由实数扩展到了复数。但是，在相当长的时期里，一些人对虚数和复数的存在是有怀疑的。十六世纪的意大利数学家卡当(G. Cardane, 1501—1576)仍称复数为"似实而虚的"数。十七、八世纪，人们努力寻找复数的几何表示和物理意义。到了十九世纪初，人们最终作出了复数的几何解释，它被理解为平面上的点或矢量，并与物理学上的各种矢量联系起来了。这样，复数在物理学的实际研究中首先得到了一些应用，并受到了初步检验。这种应用，反过来又推动了复数理论的进一步发展，逐渐形成了一门重要的数学分支——复变函数论。复变函数论在解决与弹性力学、电工学、空气动力学、流体力学等有关的生产实际问题中显示出，它是一种很有效的数学工具。既然复变函数论在实践中得到了检验，证明它是科学的数学理论，那么，作为这种理论的基本概念的复数及其虚数，也就一同在实践中得到了检验，证明它是科学的数学概念。

复数确立之后，数的概念得到了又一次扩展。

历史表明，数学概念的扩展，一方面与人们生产、生活的实际需要有关，另一方面也是与数学理论自身的矛盾运动分不开的。实际上，从解决数学自身矛盾角度来看，数概念的每一次扩展，也是解决数学运算中所出现的种种矛盾的必然结果。例如，解决不能整除的矛盾产生了分数；解决当两数相等时不能进行减法运算的矛盾产生了零；解决不够减的矛盾产生了负数；解决开方开不尽的矛盾产生了无理数；解决负数不能开偶次方的矛盾产生了虚数。从而数的概念就出现了自然数⟶有理数⟶实数⟶复数这样一个演变、扩展的系列。

(5)超复数的引入

在一段时间里，人们认为数概念扩展到复数，就算达到完

善的程度了，以后的发展只能表现在已演变，扩展出的系列之内的变化上。然而，事实恰相反，随着社会实践的发展，人们对现实世界的认识在不断深化，而数概念又是反映现实世界量侧面认识的重要方面，因此，数概念也必然会打破原有范畴，继续向前扩展。超复数的引入，就说明了这一点。

所谓超复数，就是象过去由两个实数数组建立复数那样，由三个以上实数数组所组成的“多元数”。人们研究和应用比较多的是“四元数”。

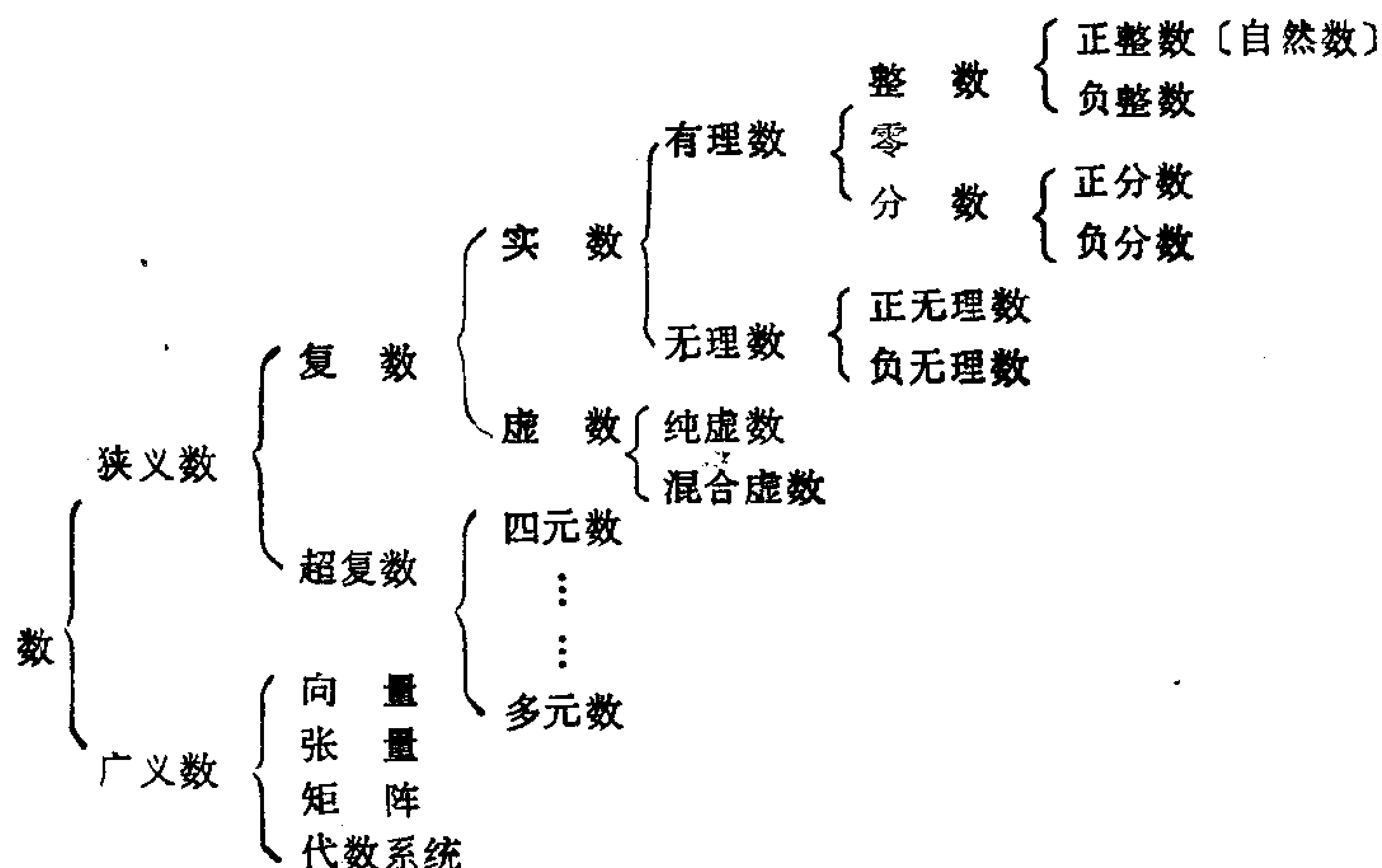
1843年10月16日，英国数学家哈密顿（W.R.Hamilton，1805—1865）在爱尔兰的都柏林提出了“四元数”。四元数是由1和另外三个单位i、j、k构成的，使得每一个四元数$q=a+xi+yj+zk$都是一个“标量”a（实数）和一个向量$xi+yj+zk$之和，其中x、y、z是实数。四元数可用来描述三维空间的旋转。四元数有广泛的应用。它在数论、群论、圆锥曲面和二次曲面、刚体运动、数学物理方法、量子理论以及相对论等方面，都有重要应用。

与此同时，人们还开展了关于“多元数”的理论研究，其研究成果应用于数学以及自然科学的许多领域。

（6）广义数的出现

有了多元数这种超复数，我们就可以把复数和超复数称之为狭义数。相对于狭义数，又出现了广义数。上面谈到的自然数、有理数、实数、复数和超复数，它们的每一元素均是本来意义的数，并都有相应的运算法则。但是，由于实践的需要，数学中又出现了一系列以“运算”为其特征的概念。这些概念，人们就统称为“广义数”。例如，向量，张量、矩阵等，都属于广义数。此外，带有某种“运算”的“数”的集合即代数系统，例如群、环、域等，也都是一些广义数。这些广义数，在数学和自然科学中的应用是极其广泛的。

由上可见，数概念确是在人们的社会实践和数学理论自身矛盾运动的推动下，不断演变，不断发展的。为明显起见，我们可以将数概念演变和发展的过程，归列为下表：



2.数概念的矛盾性[1)]

前面已讲过，数概念产生和发展的过程是自然数 —(分数、零、负数)→ 有理数 —(无理数)→ 实数 —(虚数)→ 复数 —(超复数)→ 狭义数 —(广义数)→ 数。这个过程始终都存在着矛盾。在自然数中存在一与多的矛盾，在整数中存在有与无的矛盾，在有理数中存在整数与分数、正数与负数的矛盾，在实数中存在有理数与无理数的矛盾，在复数中存在实数与虚数的矛盾，在狭义数中存在复数与超复数的矛盾等。数的概念，正是在不断认识和解决这些矛盾的过程中不断发展的。

（1）"一"中包含着多

1）此部分是根据作者与陈任昭同志合作的论文改写而成的。

前面讲过，人们根据实践的需要，逐步形成了一与多的观念。开始认识数“一”，进而认识数“二”，对于三及三以上就认为多。这种用三表示多的习惯，甚至还延续到现在。“‘三个臭皮匠，合成一个诸葛亮’，这就是说，群众有伟大的创造力。”[1]三人为众，人多出智慧。多与一这两个概念在人们的心目中是有区别的。但仅有这种认识还不能形成自然数系的概念。自然数系只是在人们认识到多与一之间的内在联系后才形成起来的。在这里一是多的基数，多是一的和数。一与多这对矛盾的双方就是以这种形式统一起来的。

后来，随着实践范围的扩大，认识能力的提高，人们逐步明确了，在自然数中，任何一个N不管它多么大，都可以看作是由N个1相加起来的结果，即多是由1连续相加转化而来的；不仅如此，人们又进而发现，任何一个自然数无不在一定条件下转化为1。例如，任何一个自然数被它自身除其结果等于1，任何一个自然数的零次幂等于1，1的任何数次幂还是等于1。这种多转化为1的情形，在人们的社会实践中也是很常见的。人们在测量长度、面积和体积时，可以采取任何适当的数量来作单位1，而测量时间、重量和运动等也是如此，看起来1000米可谓“多”，可是在计算汽车运行的路程以公里作量度单位时，它却变成“1”(公里)了。而对于量度星球之间的距离，公里也嫌太小而采取光年作量度单位，1光年等于光一年所走过的路程(10万亿公里)。看，在这单位1中包含了多么远的路程！在这里，我们可明显地看出，什么样的多都包含在这个初看起来如此简单的单位1中。这种1中包含着多，多转化为1，在数学运算中是有所体现的。在减法运算(1－3/3)里，只有把1写成3/3，才能得到

1）《毛泽东选集》第三卷，第936页。

$$1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}。$$

在幂级数中，零次幂也是很重要的，如果没有$x^0=1$，级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

就不能写成如下整齐的形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

特别是在指数函数$y=a^x$ ($a>0$, $-\infty<x<\infty$)中，若没有$a^0=1$，那当$x=0$时，$y=$？怎么去讨论这个函数在$x=0$处的性质？可见，多转化为一，这在数学中是必不可少的。

但是，有些人由于头脑中缺乏辩证法，对这一点却没有完全意识到，正如恩格斯所指出的："数学家们在做起来对自己方便的地方，都不动声色地在自己的计算中引用$x^0=1$，或引用分子和分母相等的分数，即等于一的分数，因而在数学上运用了包含在一中的多。但是，如果有人以一般的表达方式向他们说，一和多是不能分离的，相互渗透的两个概念，而且多包含于一中，正如一包含于多中一样，他们就会皱起鼻子，并做起鬼脸来。"[1]事实表明，一和多是对立的，又是统一的，在一定条件下互相转化，一转化为多，多转化为一；一中有多，多中有一。一与多的矛盾，是客观世界的矛盾在数学中的一种反映。

(2)"零"并不表示绝对的无

零概念产生之后，人们常常用"无"字来表示它。在我国古代的《九章算术》中记有"正无入负之"(即"零减正数得负数")，其中的"无"就是"零"。拉丁文中用字"nullum"表示零，字义亦是"无"。前面已讲过，表示零的记号"0"，也是在十进位置记数法中为表示没有数的"空位"时被首先采用的。可见，数"0"的原来意义的确是表示某物的无。这个无是特定的无，而不

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第238页。

是抽象的无。比如,仓库中某物没有了,用数学语言来说就是“等于零”了!这里的“零”,不是说某物化为乌有,一切皆无,而是指某物已不在仓库,例如全部被领走了。这里的无,是指某物不在这个特定场地,而在别的某个场地。温度计上的零点是一个极其重要的点,这个点也不是代表纯粹的、抽象的无,而是代表物质十分确定的状态,即一个界限。在这个界限上,在一个标准大气压下,水开始结冰,冰开始融化或升华,水汽开始凝为雪花,即物理学上所谓的固、液、气三相共存。又如,在运用数学工具去解决一个比较复杂的实际问题时,往往要首先确定一个直角坐标系,其中坐标原点(即零点)是一个特定的点,它是全部计算的中心,有着决定的意义。总而言之,无论我们在什么地方碰到零,它总是代表某种十分确定的东西和状态,在几何学和物理学中,它作为界限,比其他一切被它限定的数量都更重要。

在数学中,“0”表示某物特定的无,是对任何一个确定的量的否定,但它本身还是有量的规定的。零作为一切正数和负数之间的界线,作为既不是正、又不是负的唯一的真正的中性数,是一个非常确定的数。把零放在任何一个自然数的右边,按照十进位记数法,它就使该数增大十倍,再添一个零就增大一百倍。零乘任何一个数,都使这个数变为零;零除以其它任何一个数,都使这个数变成零。若令一个代数式等于零,结果使这个代数式变为方程式。可见,零比其它一切数都具有更丰富的内容。

零表示特定的无,有量的规定,这不仅在考虑地球上的有限事物时是这样,而且在宇宙空间或微观世界中考察无限事物时也是如此。当一事物与另一特定事物比较起来,其某方面的数量为微不足道时,就把该事物的这一数量看作是零。例如,天体力学考察行星绕太阳公转时,把行星视为没有大小

的质点，其半径等于零。这里的零，并不是说行星的实际半径长度为零，而是指与太阳系的半径比较起来，行星的半径小得可以忽略不计而已。或者说，行星的相对半径为"0"。从数学角度看，行星的平均半径与太阳系半径之比等于无限小。可见，行星的相对半径长度之无，是个有特定意义的无。正因为如此，太阳系的半径R与行星的半径比较起来，却等于无限大，即$R/O=\infty$。这正如恩格斯所指出的："零是具有非常确定的内容的"，"零除任何一个数，使这个数变成无限大"。[1]

由上可见，零是任何一个确定量的否定，本身是有明确的量的规定的。零是表示任何一个量的无，本身还是有丰富内容的。零一方面表示无，另一方面表示有。零是有和无的对立统一。而且正因为如此，"0"才能作为一个确定的数参与数学运算。过去有些数学家虽然也能自如地对零进行运算，但对此却缺乏本质的认识。恩格斯曾指出："任何一个量的无，本身还是有量的规定的，并且仅仅因此才能用零来运算。一些数学家泰然自若地以上述方式用零进行运算，即把零当作一定的量的观念而用于运算，使它和其他量的观念发生量的关系，但是他们在黑格尔那里读到这被概括为：任何某物的无，是某个特定的无，就大惊失色了。"[2]

（3）"分数"也可表示整体

众所周知，整数表示整个物体或几个物体，而分数表示整体的一部分，即分数和整数是不同的、对立的。但是，分数与整数又是统一的。在有理数中，整数可以看作分母为1的分数，分数也可以转化为整数，从而表示整体。

事实上，整数相除可以得到分数，如：7/9，6/5，8/8等。不仅

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第238～239页。

2）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第239页。

如此，任何一个分数都在一定条件下转化为整数，如在度量中得出来的分数7/10(尺)，只要把度量单位(尺)缩小到分母那样的倍数，则度量的结果就转化为整数7(寸)。这无异于用分母去乘这个分数，结果使这个分数转化为整数。我们甚至可以把这件事情直接写成7/10(尺)＝7(寸)。分数7/10(尺)既表示1尺的部分，又可以表示7寸这个整体。特别是假分数，如6/3表示6个单位组成的集合的三分之一，可是6个单位的三分一又等于2个单位，因而分数6/3又表示整体。一句话，分数可以转化为整数，从而表示整体。

分数和整数既是对立的，又是统一的。分数与整数的对立，说明分数与整数是有区别的。因此，分数才起到了整数所不能起的作用。它使测量结果比较接近实际，以及解决了仅有整数所不能解决的许多新课题。但是，人们不仅利用了分数与整数之间的区别，而且也利用了分数与整数之间的相互联系、相互转化。分数通分有时就要把整数化为分数，而在解分式方程时又要首先把分式变成一个整式，实际上是把分数化为整数。所以，分数与整数的互相转化，对数学来说是十分必要的。

(4)"负数"亦可为正

前面已谈到，人们在实践中很早就碰到了如往南与去北，上升与下降，增加与减少，收入与支出等相反的现象与过程。实践要求人们对这些矛盾着的现象与过程，就其数量侧面作出科学的描述。这里，不仅要区分绝对数量的多少，还要辨别意义的正反。但是，在较长的历史时期内，在数学中并没有引进正负数。那时，人们对于意义相反的量，仍是用自然数和分数来表示，而对其相反意义则用文字语言加以说明，如向东多少米，向西多少米，上升多少米，下降多少米。在运算中则用"加"和"减"来区别。当时人们对减法的理解就是从某些量中

去掉其一部分或全部。所以，只考虑大数减小数，至多考虑两个相等的数相减，其差为零。至于小数减大数，如 $8-9$，在日常生活中被认为是不必要的，是"荒唐"的。如某人手里有8元钱，买了人家9元钱的东西，他欠人家1元，通常总是用 $9-8=1$ 而不用 $8-9=-1$ 来求出所欠钱数。在数学中引进正负数之前，人们运算中甚至在解方程中也设法避免小数减大数。从公元前两千多年的巴比伦到公元后二世纪的古希腊，虽然都研究了一些代数方程解法，但都企图避免小数减大数，因而没有引进正负数。在公元前后，我国在解决有关农业生产的二元一次方程组问题的过程中引进了正负数概念，并总结出名为"正负术"的正负数四则运算法则。在公元前七世纪，印度也从解方程中引进了正负数的概念。

在解代数方程中之所以必须引进正负数，就是由于现实世界中意义相反的量反映到方程中，并错综复杂地交织在一起。如果仅有原先的自然数、分数以及零，就会感到十分不便；特别是在求解某些多元一次方程组的过程中，无论如何也回避不了小数减大数的矛盾。为了解决这种矛盾，就必须引进正负数。我国古代的数学工作者就是从解决有关农业生产的二元一次方程组中引进正负数的。

现实世界中意义相反的两个量是对立统一的，因而作为这种量的反映的正数和负数也必然是对立统一的。它们不仅互相对立，而且是彼此不可分离的，在一定条件下互相联结，互相依赖，互相转化，正转化为负，负转化为正。人们在运用数学工具解决工程技术等实际问题时，往往利用解析几何知识，首先建立坐标系，当选定坐标原点"0"以后，便把0点右边规定为正，左边规定为负。可是人们也常根据不同的需要作出相反的规定，即把零点往右规定为负，往左为正。这样原来的负数就转化为正数，这无异于将负数"$-x$"乘上"-1"，结果变为

“$+x$”，即$(-x)(-1)=+x$。所谓“负乘负得正”这一法则，在这里是一目了然的。再如，地磁的南极（负极）所吸引的磁针的真正北极（正极），物理中却习惯地称之为南极（负极）。换句话说，指南针指南的那一极本来是正极（北极），可是到了物理学中（日常生活中也如此）却变成了负极（南极）。这并没有引起什么混乱。这些事实说明，正和负是矛盾着的两个方面，在一定条件下互相转化，可以调换位置。恩格斯说得好：“正和负可以看作彼此相等的东西——不管把哪方面当作正，把哪方面当作负，都是一样的，不仅在解析几何中是如此，在物理学中更是如此。”[1]一般说来，对于现实世界中具有相反意义的两个量，可以视需要而任意把其中一个规定为正，另一个为负。所以对于意义相反的两个量，对于其中任何一个我们不能绝对地说它是正的或负的。但这并不等于说，正和负就没有区别了。正和负是有区别的，正因为如此，才解决了许多难于解决的问题。但在这当中，也利用了负数和正数之间的联系。人们在解决有关生产实际的代数方程时，之所以能随意移项，正是运用了移正变负和移负变正这种正和负之间的联系。

（5）“无理数”并非无理

有了负数之后，数便扩展到有理数。有理数是相对于无理数而言的。在还没有引入无理数概念之前，无所谓有理数，人们只称之为整数、分数。无理数是作为有理数的对立物而出现的，也就是说无理数与有理数是互相对立的，互相矛盾着的。但是，一切矛盾都依一定条件向它们的反面转化着，无理数与有理数也不例外。事实上，无理数就是由有理数在一定条件下转化而来的。任何一个无理数α，由于它是个无限不循环小数，所以总可以把它写成如下级数形式

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第194页。

$$a=a_0+10^{-1}a_1+10^{-2}a_2+\cdots+10^{-n}a_n+\cdots$$

其中$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$均为有理数，前几项的和$S_n=\sum_{i=0}^{n}10^{-i}a_i$也是有理数，可是当$n\to\infty$的条件下$S_n\to a$，有理数$S_n$就转化为无理数$a$。恩格斯指出："在数学上，为了达到不确定的、无限的东西，必须从确定的、有限的东西出发"。[1]人们正是这样，从确定的、有限形式的有理数出发，找到了无限形式的无理数，从而理解和把握无理数。

相反，无理数也在一定条件下转化为有理数。如$\sqrt{2}=1.414\cdots$是无理数，可是用它自身$1.414\cdots$去乘，它则转化为有理数2，即$(1.414\cdots)\cdot(1.414\cdots)=2$。特别是在实际计算中，在误差允许的范围内，经常把无理数近似地表作有理数，即把无理数转化为有理数。我国古代，开始用"周三径一"近似地表示无理数π，即$\pi\doteq3$；在公元三世纪，把π近似地表示为3.1416；到了南北朝，祖冲之（429－500）则把π表示为$\pi=\frac{355}{113}$（密率），或$\pi=\frac{22}{7}$（约率），并计算出$\pi\doteq3.14159265$。当极限理论出现之后，人们则可计算出π的任意位小数的值，达到任意精确的程度。不仅在理论上而且在实践上体现了无理数与有理数的辩证统一。

无理数与有理数是对立统一的。人们从中认识到无理数是从有理数转化而来的，而且在一定条件下又转化为有理数。无理数与有理数之间的互相转化是很重要的。在实际计算中，如$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq0.71$；在解无理方程时，也要首先把它有理化。而工厂的木工师傅，更是在误差

1）《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第48页。

许可条件下，用无理数的有理近似表示来确定尺寸，等等。由于有了无理数，数便发展到实数。实数是无理数与有理数的矛盾统一体。

（6）“虚数”确不虚无

历史上的唯心主义者，为了宣传他们的唯心主义理论，常常歪曲地利用数学成果作为其“理论依据”。虚数这一数学概念就曾被一些唯心主义者歪曲利用过。他们说什么虚数是与现实世界无关的，是人们头脑中固有的，是纯粹“先验地产生的”，因而是“虚无”的。事实恰恰相反。从前面所介绍的虚数产生和发展的历史中，我们不难看出，“虚数”并不虚无。

意大利数学家邦别利之所以能解决运用一般求解法则求不出某些三次方程的实根这样的矛盾，实际上就是由于运用了虚数与实数之间的辩证关系的缘故。虚数与实数不仅是对立的，而且是统一的，在一定条件下互相转化。如实数-1在开平方的条件下转化为$\sqrt{-1}$，而虚数$\sqrt{-1}$在平方的条件下转化为实数-1，并由此认识和建立了虚数的一系列合理运算法则，为研究一般二次、三次方程打开了新的局面。从此虚数便开始被人们承认了。特别是有了复数概念之后，虚数与实数便在复数中统一起来了。因为一方面，虚数以及复数是人们在解决生产实际中的代数方程问题的过程中产生的，它是现实世界数量关系的一种反映；另一方面，它又不是从当时的生产实践经验中直接总结出来的，而是在方程的解法探讨中从实数辩证地导出来的，它是现实世界数量关系的一种曲折的反映。虚数是解决生产实际问题中正确数学运算的必然结果，它的产生是与人的理论思维在实践基础上的能动作用分不开的。虽然对$\sqrt{-1}$本身不能在我们的头脑之外硬加上某种实在性，但是它和实数一起构成的复数却有着现实的物理意义，直接反映了客观现实的数量之间的合理相互关系。正如恩格斯指

出的："甚至数学上各种数量的明显的相互导出，也并不证明它们的先验的来源，而只是证明它们的合理的相互关系。"[1]

虚数是由实数转化而来的，虚数又能转化为实数，它们是对立统一的。虚数是在解决有关生产实践的方程问题中产生的，它又能够有效地解决生产实践的问题，虚数理论与生产实践也是辩证的统一。这两个统一，揭示了虚数的实质。表面看来，虚数似乎是"虚无飘渺"的，究其实质，它并非如此，相反地它与实数是不可分离的；虚数"以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实"。[2] 虚数以及复数产生和发展的过程，体现了虚数与实数、理论与实践的矛盾统一过程，是辩证唯物论的反映论的生动例证。

二、形概念的发展及其相互转化

1.形概念的发展

历史表明，形概念的产生、进化和发展，是一个艰难而曲折的过程。了解这个过程，对于我们深刻理解数学内容的实质，是十分必要的。

（1）从具体事物形状中抽象出形的概念

关于形概念的产生，恩格斯在《反杜林论》中曾指出："和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。"[3] 事实正是如此。古代人类，在长期观察自然界中的岩石、树

1）《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

2）《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

3）《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

木、水面、日月等各种具体事物形状的过程中，对形有了初步的认识。特别是在人们制造和使用各种形状的工具如石刀、木棒、弓箭等过程中，人们对形又有了进一步的认识。但是，这时所形成的形的观念，还没有脱离具体事物，或者说，是具体的形的观念。比如，"直线"是指平直的岩石棱、笔直的树木、拉紧的弓弦等；"圆" 是指日、月、眼珠、石磨等；"平面"是指静静的水面、平滑的岩石面、方形木棒的侧面等。显然，这都是些具体的、直观的和粗糙的关于形的观念。

随着生产实践的发展，对现实世界认识的深化，人们逐步从具体事物的形状中抽象出形的概念。比如，从具体的"直线"中抽象出直线的概念；从具体的"圆"中抽象出圆的概念；从具体的"平面"中抽象出平面的概念等。这是人类对形认识的一次质的飞跃。这一飞跃，生动地体现了从具体到抽象，从个别到一般的认识过程；这一飞跃，使人们克服了具体、个别事物的局限性，获得了更为抽象的、更为一般的形的概念，即数学中形的概念。

据史料记载，在我国的原始社会里，就有了某些形的概念。例如，在出土的新石器时代的石斧、石铲上面，凿有整齐的圆形孔[1]；在公元前6000年左右制成的仰韶文化彩陶器上面，画有规则的几何图形；在西安半坡村由考古发掘的夏代以前的原始部落遗址中，有圆形和方形的房屋基地[2]；殷代就有画方圆的工具——"规矩"；[3]殷商甲骨文中有如"口"、"田""囲"这样的刻迹[4]；殷商后期制造的钟鼎，上面绘有各式各样的几何图案等等。这些都是古代人类对形的认识，从具体事物的形状上升到抽象的一般形概念的有力证明。

1）参见李俨：《中国古代数学史稿》，中国科学图书仪器公司出版，1954年。

2）参见钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1964年版。

3），4）同1）。

（2）对形之间关系的认识

①关于不同图形之间关系的认识

根据生产发展的需要，人们不满足于已有的形的概念，渐渐开始考察和研究一些简单的、有限图形之间的关系，并从而产生了几何学。也就是说，“我们的几何学是从空间关系出发”[1]的。历史表明，直角三角形即所谓“勾股形”是人们认识较早的图形之一。它的三边之间的关系，就是在天文观测和土地丈量的过程中发现的。我国最早的一部天文数学书《周髀算经》就记载有“勾广三，股修四、径隅五”这一反映直角三角形三边关系的勾股定理的特例。其中，“股”表示测量时标竿的高，“勾”表示标杆影子的长。赵爽在为《周髀算经》作注时说：“禹治洪水，决流江河，望山川之形，定高下之势，……乃勾股所由生也。”可见，我国古代很早就从实践中发现了反映直角三角形三边关系的勾股定理。

为了计算一般直线形的面积，人们将其分为若干个三角形，而每一个三角形又可分为两个直角三角形，人们便通过直角三角形、三角形和一般直线形的关系推导出各种直线形的面积公式。因此，马克思说：“为要决定并且比较一切直线形的面积，人们就把它们分成三角形。人们再把三角形还原为一种和它的外形全然不同的东西，那就是还原为底乘高之积的二分之一。”[2]我国古代数学典籍《九章算术》中的第一章“方田”，主要就是关于田亩面积的计算问题，第五章“商功”记载了关于丈量土地，修筑堤坝、建造房屋和测量容积等活动中创造出来的反映各种几何图形关系的几何知识，其中包括各种直线形的面积、体积公式。

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第245页。

2）《资本论》第一卷，人民出版社，1963年版，第7—8页。

公元前三世纪，古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前330—275)等人完成了人类史上第一部公理化体系的数学著作《几何原本》。其中，无论是作为推理结果的定理，还是作为推理前提的公理(或公设)，都是反映几何图形关系的。比如，欧氏第五公设："若两条直线和第三条直线相交，且在同一侧所构成的两个同侧内角之和小于二直角，则把这两条直线向这一侧适当延长之后一定相交。"就是讨论三条直线的位置关系的。而这些公理又都是人们在长期实践中总结出来的，不需要也不可能用数学证明的"少数思想上的规定"。历史表明，人们对这些图形之间关系的认识，完全是从实践中根据需要而产生的。希腊文中的"几何"就是"土地测量"的意思。恩格斯说："数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的"。[1]作为数学重要组成部分的几何学，它的产生历史生动地说明了恩格斯这一论述的正确性。

关于三角形的性质，在综合几何中就三角形本身进行了详尽的研究。但对三角形三边关系的深入认识，是通过研究三角形与圆形的关系之后而获得的，并从而形成了数学新分支——三角学。恩格斯在《自然辩证法》中，对三角学形成的历史，从人们对图形之间关系认识的角度，进行了深刻地论述。他说："在综合几何学只从三角形本身详述了三角形的性质并且再没有什么新东西可说之后，一个更广阔的天地被一个非常简单的、彻底辩证的方法开拓出来了。三角形不再被孤立地只从它本身来考察，而是和另一种图形，和图形联系起来考察。每一个直角三角形都可以看作一个圆的附属物：……这样一来，边和角便得到了完全不同的、特定的相互关

1) 《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

系，如果不把三角形和圆这样联系起来，这些关系就决不能发现和利用的。于是一种崭新的三角理论发展起来了，它远远地超过旧的三角理论而且到处可以应用，因为任何一个三角形都可以分成两个直角三角形。三角学从综合几何中发展出来，这对辩证法来说是一个很好的例证，说明辩证法怎样从事物的相互联系中理解事物，而不是孤立地理解事物”。[1]

②关于图形与其变换后图形关系的认识

几何学中，有各种几何变换，诸如，合同变换、相似变换、仿射变换、射影变换、拓扑变换等。对这些变换的研究，加深了人们对图形与其变换后图形之间关系的认识。

比如，三角形$\triangle ABC$，经相似变换（位似变换）后，变成了新的三角形$\triangle A'B'C'$（如图1.1）。旧的$\triangle ABC$与新的$\triangle A'B'C'$有何关系呢？相似变换的性质告诉我们，它们的对应边之比相等：$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$；

对应角的大小相等：$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$。如果对变换后的三角形再作一次相似变换，并变为$\triangle A''B''C''$（如图1.2）。

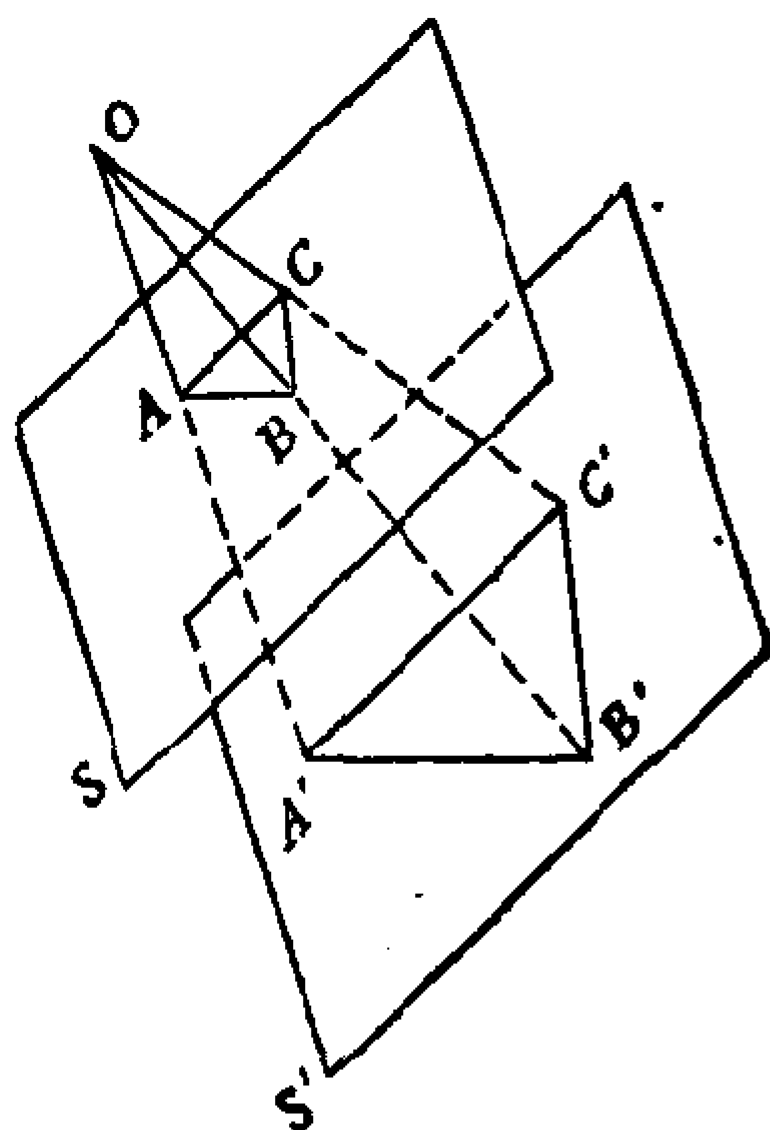


图1.1

这时 $\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$仍是相似形，即对应边之比相等：$\frac{AB}{A''B''}=\frac{BC}{B''C''}=\frac{AC}{A''C''}$；对应角的大小相等：$\angle A=\angle A''$，$\angle B=\angle B''$，$\angle C=\angle C''$。这种变换的合成是可以继续

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第242—243页。

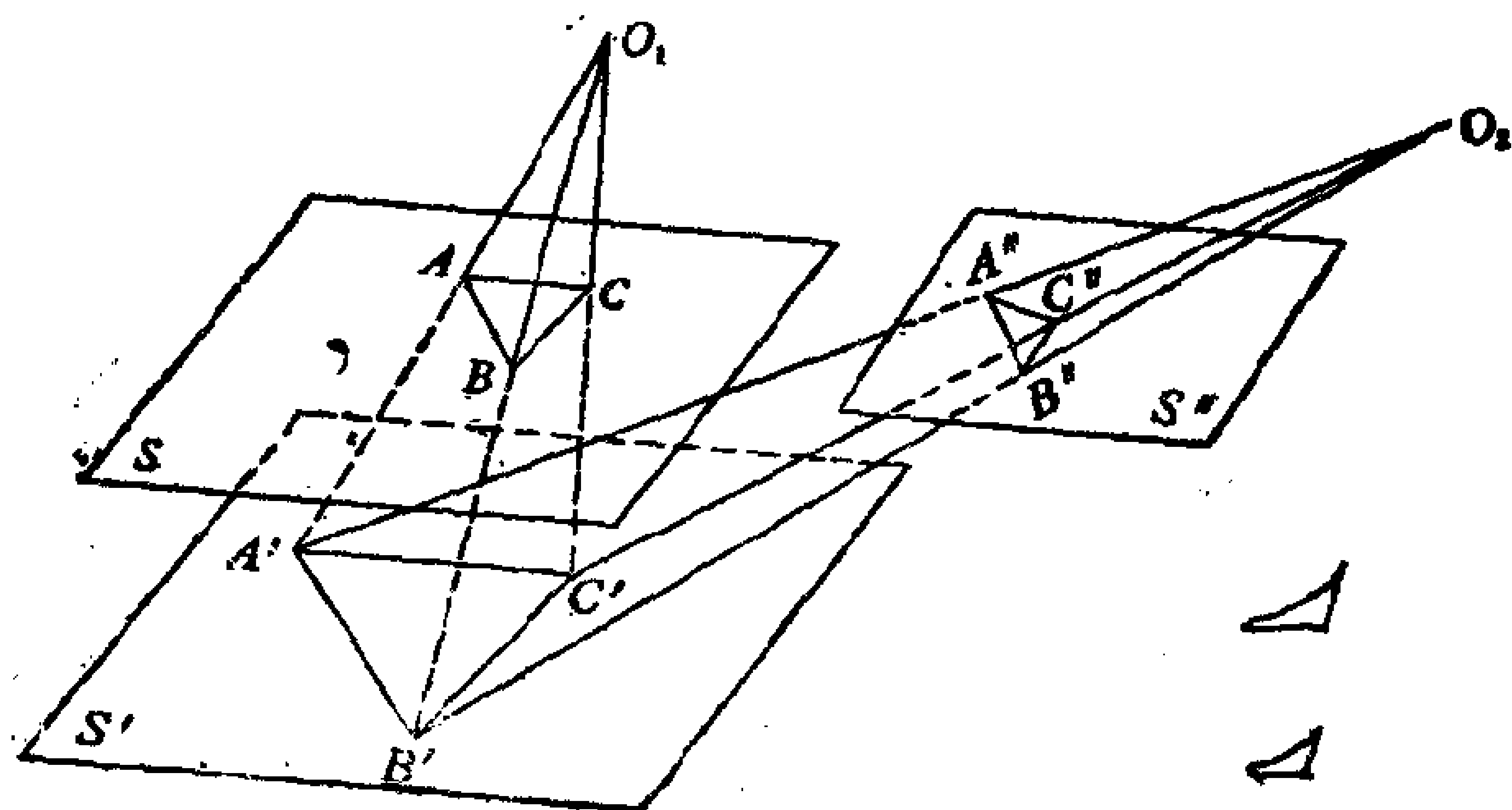


图1.2

做下去的，但无论做多少次，其结果有两点，即对应边之比相等和对应角相等是不变的，并且存在一个相似变换将原图形直接变换为经多次变换后的图形。

其它各种几何变换中，均各有其自己的不变性质。比如在合同变换中，线段长度不变，几何形状不变；在仿射变换中，平行线段的比不变；在射影变换中，交叉比不变；在拓扑变换中，曲线的闭合性、相交性不变。这些不变性，深刻地揭示了经几何变换后的图形与原图形的关系，从而加深了人们对形概念的认识

③从运动的角度来认识形

十七世纪以前，人们所积累下来的几何知识，基本上属于综合几何的内容。综合几何是常量数学的重要组成部分。它主要是研究有限的和静止的图形的性质。到了十七世纪，由于生产的发展，向数学提出一系列新问题，如由于航海事业的发展，要求人们去掌握天体运行的规律；由于采矿业的发展，要求人们研究地下水流动和通风问题；由于军工事业的发展，要求人们研究弹道曲线问题等等。这些新问题有一个鲜明的特点，就是要求从运动变化的观点来研究事物。1637年，法国数学家笛卡儿(R. Descarles, 1596—1650)，正是适应这种

需要，发表了《几何学》一书。他在此书中，引入了"变数"的概念，建立了直角坐标系，把平面上的点与实数对、曲线与代数方程建立起一一对应的关系，从运动的角度，运用代数的方法研究了一些曲线的性质，并从而创立了解析几何学这门新的数学分支。

在笛卡儿的解析几何中，曲线不再被看成是既成的、静止的东西，而是被认为是在运动中逐步生成的东西。椭圆、抛物线、双曲线等不再仅仅从切割圆锥时所形成的静止图形来考察，而是作为天体、炮弹等运行的轨迹来研究。于是，人们便发现了过去在综合几何中没有也不可能发现的许多重要性质，极大地丰富了几何学的内容。解析几何的产生，开辟了运用"数"来研究"形"的道路，标志着运动进入了几何学，因而是人类对"形"概念认识的一次质的飞跃。

④对无限图形的认识

人们在认识有限图形性质的基础上，又渐渐开始研究一些无限图形的性质。这样，便使人们对"形"的认识由有限发展的无限。在欧洲的文艺复兴时期，由于建筑、军事工程制图的需要，产生了射影几何学。在这种几何学中，不仅使用通常意义上的点、直线和平面，而且还引入了"非固有元素"：无限远点、无限远直线、无限远平面。到了十七世纪，人们对无限图形又有了更深一步的认识。那时，人们为了通过直边梯形来求得曲边梯形的面积，特将其无限分割，得到曲线弧的微分，在这样的条件下，曲线与直线便是一回事了。就是说，"直线和曲线在微分中终于等同起来了"。[1] 积分学正是由此解决了曲边梯形的面积问题。显然，这里反映了人们对无限小曲线（即曲线弧的微分）性质的认识。微积分学的产生，为

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第241页。

人们进一步认识“形”提供了新的工具。

⑤由平直空间到弯曲空间

自古代到十九世纪初，人们对空间的认识基本上是欧氏空间。所谓欧氏空间即指“平直空间”，因为它认为直线是绝对的直，平面是绝对的平，所研究的曲线与曲面，亦是平直空间中的曲线与曲面。欧氏几何中的平行公理：“过直线外一点，只能引一条直线与已知直线平行”，以及认为三角形内角和等于180°等，都充分反映了这种平直空间的性质。

后来，由于航海、贸易等事业的发展，推动了球面几何的研究。在球面几何学中，直线再也不是平直空间中所说的那样绝对直了，而是一个圆弧；三角形内角和亦不是180°了，而是大于180°。这时，人们对空间的绝对平直性开始产生了怀疑。到了十九世纪二十年代，德国的高斯(C.F.Gauss，1777—1855)，俄国的罗巴切夫斯基(Н.И.Лобачевский，1792—1856)和匈牙利的亚·鲍耶(J.Bolyai，1802—1860)等人，创立了非欧几何。这种几何认为，过直线外一点，至少可以引两条直线与已知直线不相交；三角形内角和小于180°。这就彻底打破了过去传统的平直空间的观念，而承认了弯曲空间的存在。本世纪初，非欧几何在爱因斯坦相对论和天文学研究上，得到了进一步检验和应用，从而证明非欧几何所研究的弯曲空间，亦是现实空间的一种表现形式。

由平直空间到弯曲空间，是人们对空间认识的进一步深化，也是人们关于形概念的进一步扩展。

⑥由现实空间到抽象空间

形概念的演化和发展，也还表现在人们对空间的认识由现实空间进化到抽象空间。无论是欧氏几何还是非欧几何，它们所研究的都是三维的现实空间。就是说，若只考虑物体的静止的空间形式，那么有了能确定长、宽、高的三维空间概念也

就足够了，但若确定运动中物体的位置，只有三维空间概念就不够了，还需要考虑时间因素。尤其是高速运动物体的空间位置，与时间有着极为密切的关系。于是，二十世纪便产生了"四维时空几何学"。在四维时空里，能准确地表示运动物体在某一时刻的空间位置。后来，人们受代数学的启发，根据需要，又习惯地把这种四维时空称之为"四维空间"，进而根据研究事物参变量多少，提出了所谓n维空间乃至无限维空间。这种借助现实空间所提出的各种抽象空间，解决了许许多多数学问题，促进了数学的发展。

2.形概念的相互转化

和数概念一样，形概念之间既有区别又有联系，在一定条件下相互转化。形概念之间的相互转化，解决了数学理论和生产实践中的许多问题。这里，仅就两对常见的形概念的转化加以初步的分析。

(1)相交与平行

相交与平行，在初等几何中是两个对立的概念。就是说，平面上的两条直线，平行即不相交，相交即不平行，二者是矛盾的。但在高等数学中，相交与平行既是对立的，又是统一的，在一定条件下可以相互转化。

①两条直线相交，当夹角为无限小时，亦可认为平行。恩格斯在分析曲线与直线这对矛盾时曾指出："在极曲线中，虚构的微分横坐标甚至被认为和实在的横坐标平行，并根据这个假定进行运算，虽然两者相交于极上；由此甚至推论出两个三角形是相似的，其中一个三角形有一个角刚好在这样两条线的交点上，而这两条线的平行却是整个相似的基础！"[1]这里，恩格斯实际上运用了"两条直线相交，当夹角为无限小时，

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第242页。

亦可以认为平行"的思想。下面，我们就用恩格斯在分析上述问题时所举出的法国数学家波绪《微积分》中的例子，来说明这一点。

恩格斯举出的例子是波绪著作第148—151页上的第17图（即这里的图1.23）及其对该图的说明。

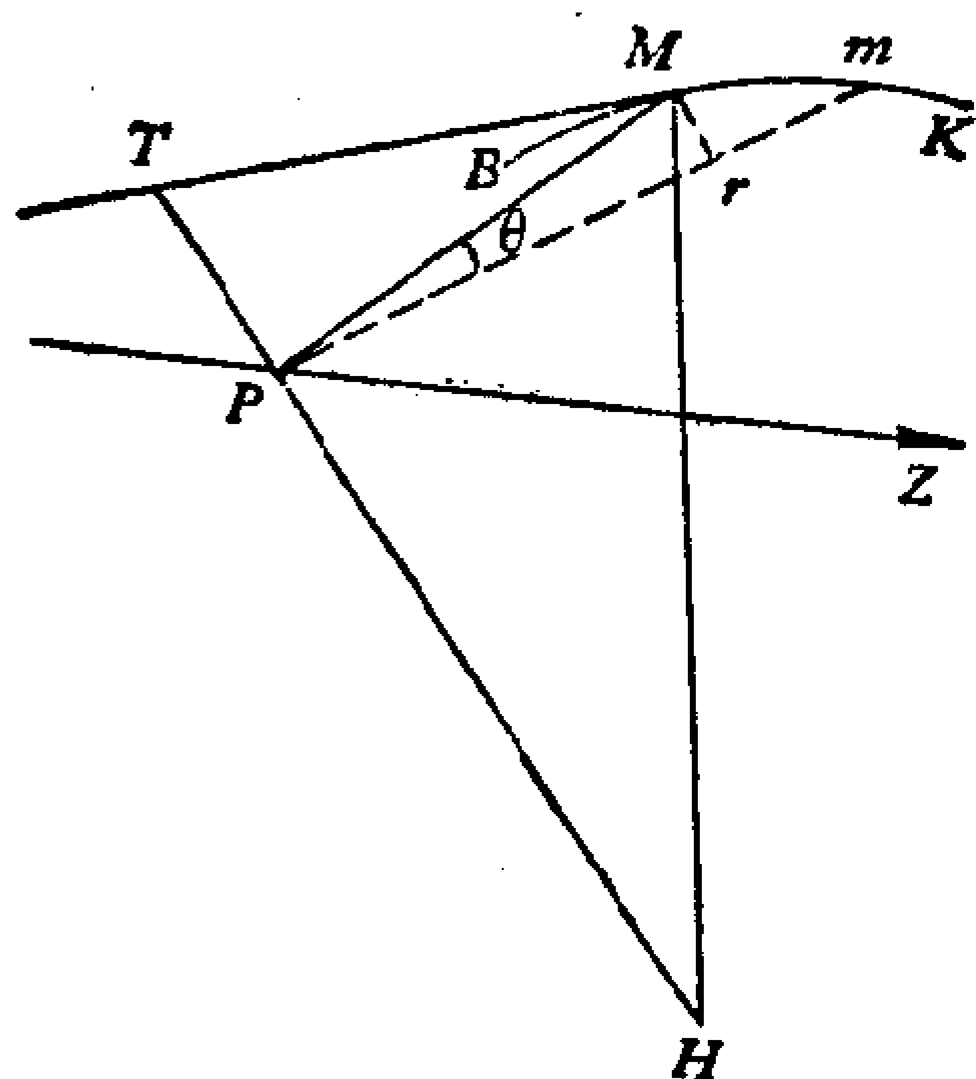


图 1·3

在图中，P为极坐标系中的极点（原点），PZ为极轴，BMK为曲线，M为曲线上的任一点，PM为M点的动径（即"实在的横坐标"），MT是曲线BMK在M点的切线，MH是过M点并与切线MT相垂直。通过P点作PM的垂线，交MT于T，交MH于H。设m为与M点无限靠近的一点，连Pm（即"虚构的微分横坐标"）。r为以PM为半径画弧与Pm的交点。请看：当m无限趋近于M，即$\angle MPm=\theta$无限趋近于0时，则$PM \parallel Pm$，并从而$\overset{\frown}{Mm}$转化为$\overline{Mm}$且与$\overline{TM}$重合，$\overset{\frown}{Mr}$转化为$\overline{Mr}$。又因为$PM \parallel Pm$，$PM=Pr$，所以$\angle TPM=\angle Mrm=\angle R$，还因为$\angle TMP=\angle Mmr$（同位角），因此$\triangle Mrm \backsim \triangle TPM$。既然，$\angle TMP=\angle Mmr$，且$\angle TMP+\angle PMH=\angle R$，$\angle Mmr+\angle rMm=\angle R$，那么，$\angle PMH=\angle rMm$，因此，$\triangle Mrm \backsim \triangle MPH$。可见，当$PM$与$Pm$夹角$\theta$无限小时，则$PM \parallel pm$，可推出$\triangle Mrm \backsim \triangle TPM$和$\triangle Mrm \backsim \triangle MPH$，故是"整个相似的基础"。就是说，如果没有夹角$\theta$无限小，$PM \parallel pm$是不可能的，一些三角形相似也就没有基础了。

从上面的分析可以看出，PM与Pm，本来是相交的两条

直线，但因为它们的夹角θ无限小，所以我们又可认为它们是平行的两条直线，也正因为如此，才有可能使一些三角形相似，解决了数学中的许多问题。

恩格斯在《反杜林论》中指出："高等数学还有另一个矛盾：在我们眼前相交的线，只要离开交点五、六厘米，就应当认为是平行的，即使无限延长也不会相交的线。"[1] 恩格斯的这段论述，讲的也就是两条相交的"直线"，在夹角无限小的条件下，亦可认为是平行的思想，至于讲到"离开交点五、六厘米"，只是一种形象的说法，即"离开交点不远"的意思。比如，在上述例子中，相交于P点的直线PM与Pm，正因为其夹角θ无限小，所以当离开P点有"Pr"这么远后，就可认为是平行的了（实际上，讨论三角形相似时，考虑的就是rm与PM的平行问题）。

②两条直线平行，在引入"无穷远点"的条件下，又可认为相交。比如，在射影几何中，除了运用普通的点以外，还特别

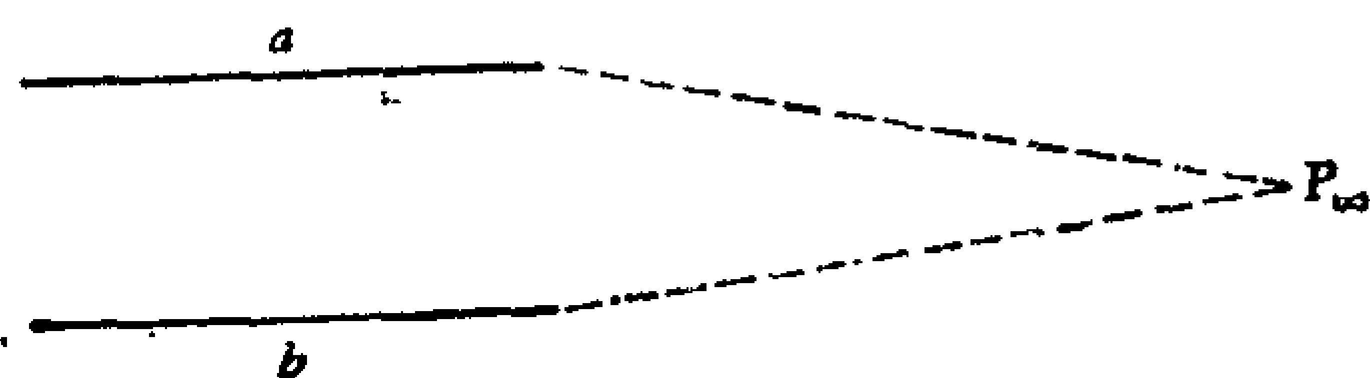


图 1.4

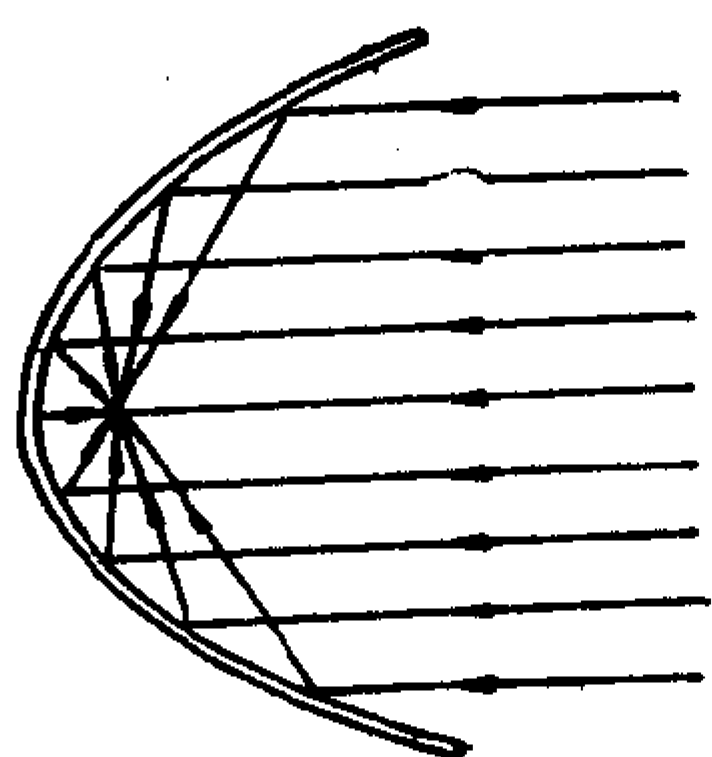
引入了"无限远点"这一概念，一般用$P\infty$来表示。设直线a与直线b平行，它们的"无限远点"为$P\infty$（见图1.4）。有了这一规定之后，平面上任何两条直线一定交于一点。如果两条直线不平行就交于一个普通点；如果两条直线平行，则交于它们的"无限远点"。正因为引入"无限远点"（以及"无限远直线"）以后，点和直线的结合关系同过去的普通点和普通直线的关

1）《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第118—119页。

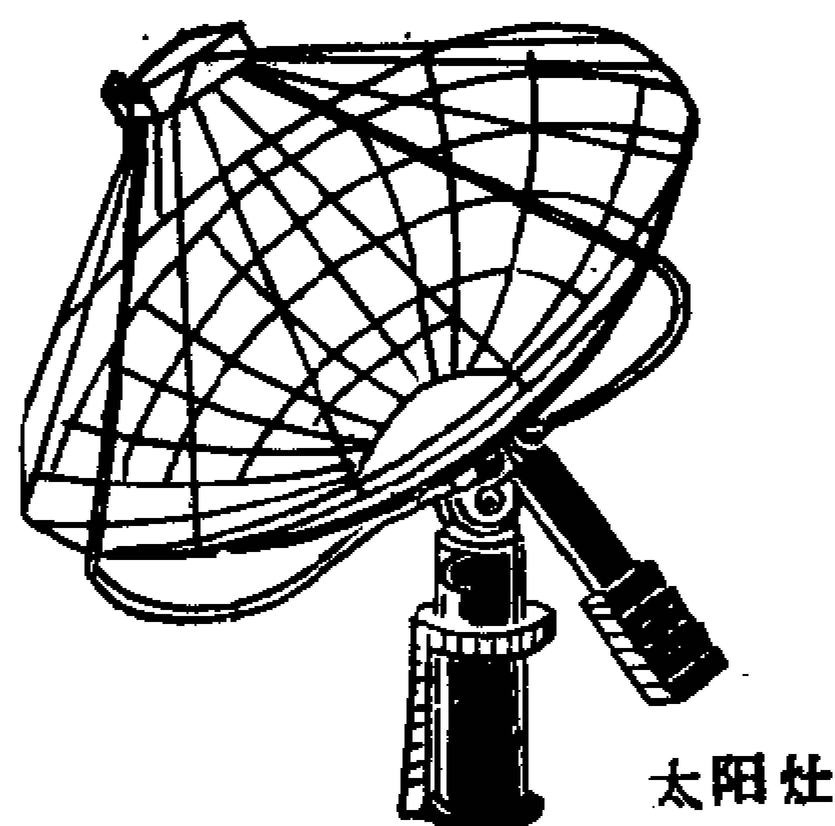
系发生了很大变化。这些变化，一方面打破了过去只有当两条直线不平行时才能求交点的限制；另一方面，使中心射影和平行射影两者统一起来了，即平行射影可以看作仅仅是经过无限远点的中心投影。

③运用将平行直线转化为相交直线，或将相交直线转化为平行直线，解决了许多生活和生产实际中的问题。

例如，根据抛物线的性质，如果一束平行光线射到抛物镜面上，由于抛物镜面的反射而成为相交的光线，且使它们都聚集在抛物镜的焦点上。人们正是根据这一原理制成了太阳灶(如图1.5)。



(a)



(b)

图 1.5

相反，人们根据同样的原理 把一个光源放在抛物镜的焦点上，则相交光线经反射后变成平行光线，由此便制成了探照灯、手电筒等，(如图1.6)。

又如，摄谱仪的设计也利用了光线的相交和平行的转化原理。摄谱仪是获得光谱并摄取光谱照片的仪器。这种仪器的主要组成部分是平行光管C，棱镜P和用作摄取光的照相机(如图1.7)。

发光体S发出的光线经过透镜L_1后会聚于O点，O点是平行光管C上的开孔，也是装在平行光管上的透镜L_2的焦点。光

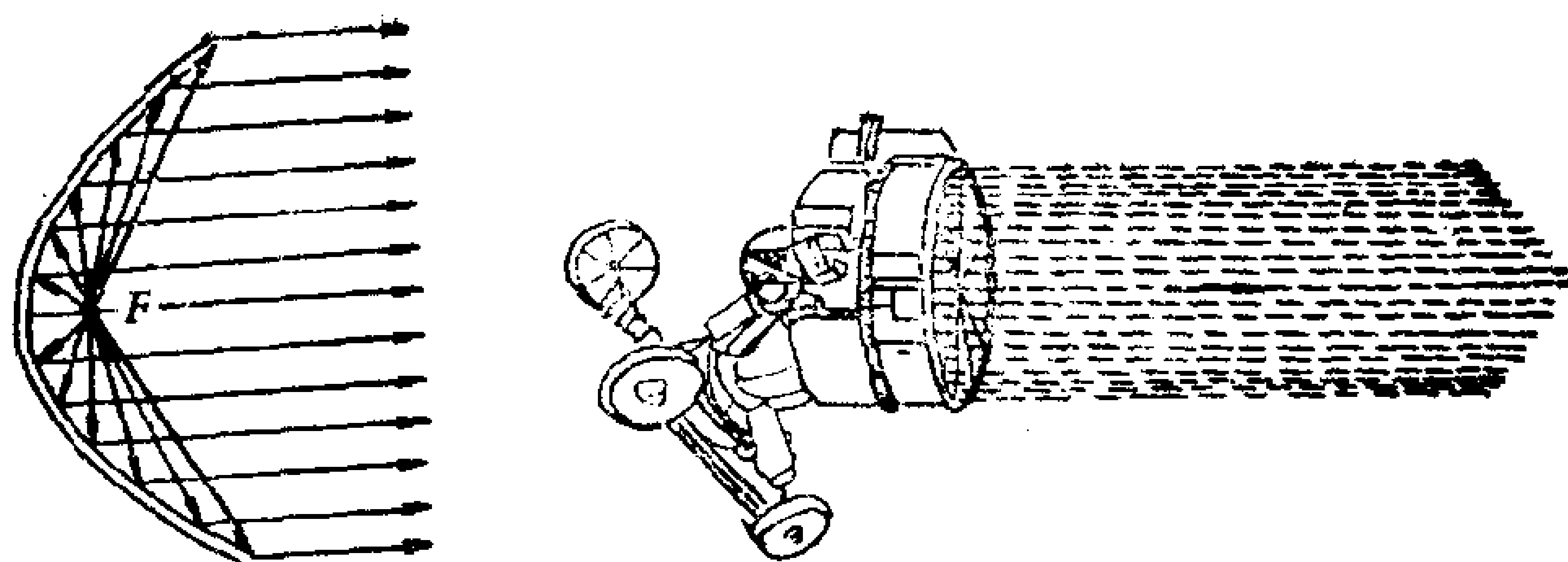


图 1 6

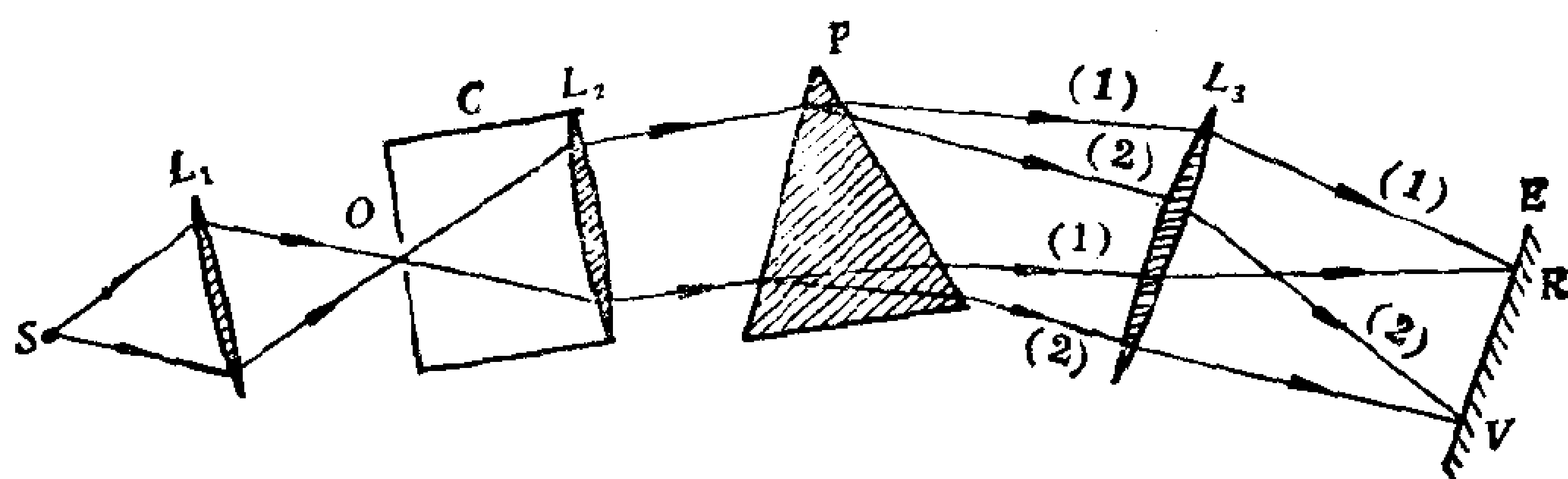


图 1.7

线通过平行光管后，形成平行光束，经棱镜P的折射，分开为偏转程度不同的各单色平行光束，最后再经过透镜L_3的折射，各单色光会聚于透镜焦面上不同的位置，构成发光体S所发出的光的光谱。放置在L_3的焦面上的底片就可以摄取这光谱的照片。这里，不难看出，整个摄谱的过程，恰恰是经过了首先将相交直线(经平行光管)转化为平行直线，然后再(经透镜L_3)转化成相交直线的过程，即相交—平行—相交的过程。

(2)直线与曲线

众所周知，直线与曲线这两个数学概念是有严格区别的。初等几何学正是以这种区别为基础建立起自己的理论体系的。但是，直线与曲线又是有着内在联系的，在一定条件下可以相互转化。比如在高等数学中，在"无限"的条件下，直线与

曲线可以当成是一回事。正如恩格斯所指出的那样："直线和曲线在微分中终于等同起来了"，[1]"当直线和曲线的数学可以说已经山穷水尽的时候，一条新的几乎无穷无尽的道路，由那种把曲线视为直线(微分三角形)并把直线视为曲线(曲率无限小的一次曲线)的数学开拓出来了。"[2]事实上，在高等数学中，正是由于运用了曲线转化为直线，直线转化为曲线，即曲直转化，解决了在初等数学中无法解决的一些问题。

①指数曲线$y=a^x(a>1)$，由于它具有x轴这样一条渐近线(即$y=0$)，所以，当$x\to-\infty$时，曲线的曲率就变为无限小，

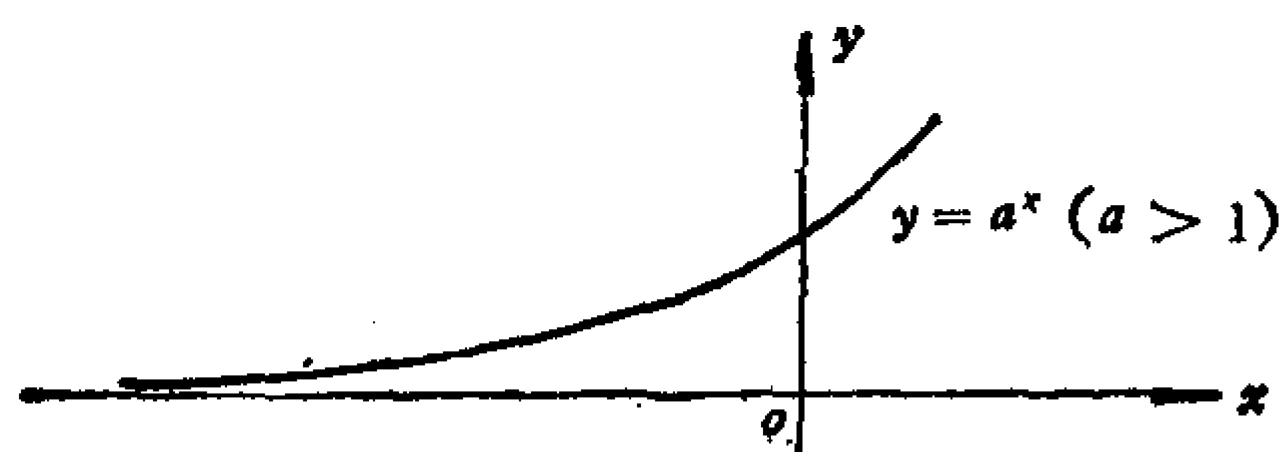


图1.8

曲线$Y=a^x$与直线$y=0$越来越接近(如图1.8)。这样曲线便转化为直线了。

②古代人们在计算圆周长时，实际上就运用了曲线转化为直线，直线转化为曲线的思想。当时，把求圆周长问题化为计算圆的内接(或外切)正多边形周长的问题。就是说，用正多边形的直边代替圆的各段圆弧，求出圆周的近似值，即实现以直代曲，曲转化为直了。然后再把内接(或外切)正多边形的边数无限倍增，这时正多边形的周长最终转化为圆的周长，即实现了以曲代直，直转化为曲了。正如我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中利用求圆面积来计算圆周率时创立的"割圆术"所指出的那样："又按为图，以六觚之一面乘半径，因而

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第241页。
2）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第242页。

三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。"又进而说："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。"[1] 刘徽的"割圆术"深刻地反映了极限的思想，是我国古代数学思想史上的重大成果之一。

恩格斯在论述直线与曲线对立统一关系时，也举过求圆周长和渐近线的例子。他说："几何学开始于下列的发现：直线和曲线是绝对对立的，直线完全不能用曲线表现，曲线也完全不能用直线表现，两者是不能通约的。但是，连圆的计算也只有用直线来表现它的圆周时才有可能。而在具有渐近线的曲线的情形下，直线完全化为曲线，曲线完全化为直线；平行的观念也同样趋于消失：两条线并不是平行的，它们不断地互相接近，但永远不相交。"[2]

③求曲边梯形的面积时，亦体现了曲线与直线相互转化的思想。事实上，曲边梯形面积计算的过程就是先将曲线转化成直线，然后再将直线转化成曲线的过程。许多微积分教程中都是这样计算的。

首先，将原大曲边梯形 $MABN$（见图1.9）分割成若干小曲边梯形，在每个小曲边梯形（如 $y_i x_i x_{i+1} y_{i+1}$）中，视曲边（$y_i y_{i+1}$）为直边（$\overline{y_i y_{i+1}}$），于是便可以小直

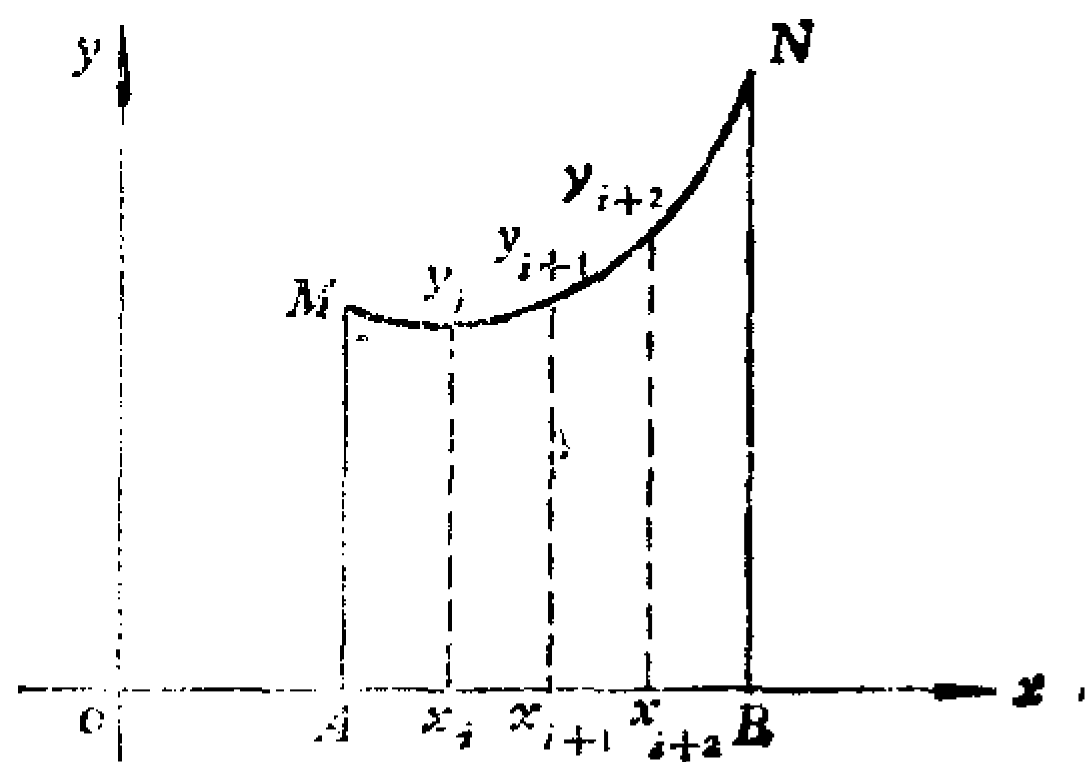


图 1.9

1）转引自吴文俊主编，《〈九章算术〉与刘徽》，北京师大出版社，1982年版，第298页。

2）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第241页。

边梯形面积之和作为大曲边梯形面积的近似值。这样，便做到了“以直代曲”，曲转化为直。

其次，再使分割无限加细（令 $|x_{i+1}-x_i|\to 0$），并取极限，于是小直边梯形面积的和 $\sum_i y_i x_i x_{i+1} y_{i+1}$ 就转化为大曲边梯形 $MABN$ 的面积。这样，又实现了“以曲代直”，直转化为曲。从而完成了“曲—直—曲”这一“否定之否定”的辩证发展过程，达到了求曲边梯形面积的目的。可见，直线与曲线的对立和转化是高等数学中的一个极其重要的矛盾运动。正如恩格斯所指出的：“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。”[1] 这种“曲转化为直，直转化为曲”以及以此为代表的“化整为零、积零为整”的方法，是高等数学最基本的思想方法之一。正是运用这种思想方法，高等数学解决了初等数学碰得头破血流也无法解决的课题。

综上所述，数和形这两个数学概念，都经历了一个由具体到抽象，由简单到复杂，由低级到高级的辩证发展过程。而它们本身又具有深刻的矛盾性质。正是这些矛盾性质，使数学具有极其广泛的适用性，成为各门科学以及一切生产实践部门都不可缺少的重要工具。

1）《反杜林论》，人民出版社，1970年版 第118页。

第二章　数学思想方法的几次重大转折

历史表明，数学的发展，不仅表现为量的积累，而且还表现为质的飞跃。数学思想方法的四次重大转折：从算术到代数，从常量数学到变量数学，从必然数学到或然数学，从明晰数学到模糊数学，就充分说明这一点。回顾、总结和分析这四次重大转折，将有助于我们全面了解数学思想方法演变的历史及其规律。

一、从算术到代数

算术和代数，作为最基础而又最古老的两个分支学科，有着不可分割的亲缘关系。算术是代数产生的基础，代数是算术发展到一定阶段的必然产物。从算术发展到代数，是人们对数及其运算在认识上的一次突破，也是数学在思想方法上发生的一次重大转折。

1.代数解题法的产生

代数解题法的产生与算术解题法的演进密切相关。而这种演进又主要来自于实践对数学需要的推动。

我们知道，算术解题法早在人类文化发展的初期阶段就产生了。“算术”一词，最初的意义是“数（shù）和数数（shǔ shù）的学问”，拉丁文是 arithmetica，来自希腊文

ἀριθμητική。古代算术的主要内容是自然数、分数和小数的性质与四则运算。算术的产生，标明人类在现实世界数量关系认识上迈出了具有决定性意义的第一步。算术作为最基本的数学工具之一，在人类社会各部门有着广泛的用场。借助它，能够行之有效地解决生产和生活实践中的大量应用题，如行程问题，工程问题，流水问题，分配问题和盈亏问题等。

然而，算术解题法却带有很大的局限性。这是因为，它只限于对具体的、已知的数进行运算，不允许有抽象的未知数参加。从解题法的步骤来看，利用算术解应用题时，首先要依据问题的条件列出关于具体的已知数的算式，然后通过四则运算求出算式的结果。这里的关键是正确地列出算式。对于那些具有简单数学关系的应用题，列出相应的算式通常并不难，但对于那些具有复杂数量关系的应用题，要列相应的算式就不是一件容易的事了，往往需要很高的机敏和技巧。对此，学过算术的人都会深有感受。

算术自身运算上的这种局限性，在很大程度上限制了它的应用范围。随着社会实践的发展，人们接触到的应用题变得越来越复杂，算术解题法的局限性和解应用题之间的矛盾也就日益尖锐起来。结果，由此产生出新的解题法——代数解题法。

代数解题法的产生过程，也就是代数学的形成过程。这个过程经历了一个漫长的历史阶段。我们很难以某一个具体的年代作为它问世的标志。但从历史上看，它大体上经过了三个不同的阶段：文词代数，即全部算法都用文字语言来表达；简字代数，即用简化了的文词来表述算法的内容和步骤；符号代数，即普遍使用抽象的符号。在文词代数解题法向符号代数解题法演进的过程中，许多国家和民族的数学家都有过贡献。值得提出的是希腊学者的工作，主要代表人物

是丢番图，他被誉为代数学的鼻祖。他写了三部书，其中最著名的一部是13卷本的《算术》，它在历史上与欧几里得的《几何原本》有着同样的重要性。《算术》是讲数及其运算的理论的，其中大部分内容属于代数的范围。在这本书中，丢番图研究了解方程的理论，特别是对整系数的不定方程作了详细的分析，因此这类不定方程通常称为“丢番图方程”。著名的“费尔马猜想”，就是费尔马(P.d.Fermat，1601—1665)在研究丢番图《算术》一书时提出的。丢番图另一重要贡献是开始用字母来表示未知数和一些运算，例如他用算式$K^{r}\bar{\alpha}^{r}\Delta l\nu s\varepsilon\mathring{M}\bar{\beta}$表示$x^3+13x^2+5x+2$。

在符号改进上，法国的韦达和笛卡儿的功绩最为突出。例如，韦达曾用 $1C+30Q+40N$, æquatur 1560表示

$$x^3+30x^2+40x=1560$$

笛卡儿则更进了一步，他是第一个提倡用$x, y\ z$代表未知数的。他提出和使用的许多符号，同现代的写法基本一致。例如，他用$x^3--9xx+26x--24\infty 0$表示

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

笛卡儿等人对抽象符号的普遍使用，是数学史上的一件大事，它标明初等代数已开始进入成熟时期。

2.代数解题法的基本思想

我们知道，在算术解题法中，只允许具体的、已知的数字参加运算，算得的结果就是所求的未知数的值。如果我们把算得的结果预先用未知数表示的话，那么，这个未知数也只能起运算结果符号等价物的作用，只能单独地处在等式的左边，静等等式右边的算式完成对具体数字的演算。也就是说，在算术解题法中，未知数是不允许作为运算的对象的，它们没有参加运算的权利。而在代数解题法中，所列出的方程作为一种

条件等式，已是由已知数和未知数构成的有机统一体。在这个统一体中，未知数和已知数有着同等的权利，即未知数在这里也变成了运算的对象，它们不再是消极、被动地静等在等式的一边，而是和已知数一样，可以接受和执行各种运算指令，并可以依照某种法则从等式的一边移动到另一边。解方程的过程，实质上就是未知数和已知数进行重新组合的过程，也是未知数向已知数转化的过程。

解方程是代数学最基本的内容。"代数"一词，原意就是"方程的科学"，这个词的拉丁文是*algebra*，由阿拉伯文转译而来，取自九世纪花喇子模（今中亚细亚乌茨别克境内）天文学和数学家阿尔·花喇子模（Al-Khowârizmi，约780—850）的一本数学书名《îlm al-jabr wa'l muquabalah》。这个书名的意思是《还原和取消的科学》，也可译为《方程的科学》。阿尔·花喇子模的著作基本上建立了解方程的方法，在数学史上起了重大的作用。

方程在数学中占有重要的地位。它的出现不仅极大地扩充了数学应用的范围，使得许多算术解题法不能解决的问题能够得以解决，而且对后来整个数学的进程产生巨大的影响。特别是数学中的许多重大发现都与它密切相关。例如，对二次方程的求解，导致虚数的发现；对五次和五次以上方程的求解，导致群论的诞生；对一次方程组的研究，导致线性代数的建立；对多项式的研究，导致多项式代数的出现；应用方程解决几何问题，导致解析几何的形成等等。

二、从常量数学到变量数学

算术、初等代数、初等几何和三角，构成了初等数学的主要内容。它们都以常量即不变的数量和固定的图形为其研究

对象，因此这部分内容也称为常量数学。运用常量数学可以有效地描述事物和现象相对稳定的状态。可是，对于描述运动和变化，却是无能为力的。于是便产生了从量上描述事物的运动和变化规律的数学部分——变量数学。从常量数学到变量数学，是数学在思想方法上的又一次重大转折。

1.自然科学中研究变量的几个典型问题

数学的发展始终受着自然科学的影响。特别是，自然科学通过向数学提出各种重大的问题，在一定程度上推动着数学的发展。变量数学就是在回答十六、十七世纪自然科学提出的大量数学问题过程中，酝酿和创立起来的。

古希腊的阿基米德(Archimedes，公元前287—212)等人在解答数学内部的某些问题时，已经十分接近了微分和积分的计算，这些计算实际上给出了微积分的原始雏型。但是，微积分理论却没能在阿基米德的时代确立，一直到十七世纪才得以完成。其原因之一，就是十七世纪以前生产和自然科学所提出的问题，常量数学大都可以解决，对变量数学的需求缺乏迫切性。然而，到了十七世纪，随着欧洲封建社会开始解体和资本主义工场手工业向机器大生产的过渡，自然科学从神学的桎梏下解放出来，开始大踏步地前进。这时，生产和自然科学部门，向数学提出一系列必须从运动变化和发展观点来研究事物的新问题。这些新问题，大体可以分为以下五种类型：

第一，描述非匀速运动物体的轨迹。开普勒在总结大量观测资料的基础上，发现行星围绕太阳运动的轨迹是椭圆；伽利略(G.Galilei，1564—1642)明确提出，各种抛射物体诸如炮弹和石头的运动轨迹是抛物线。他们的工作引起了人们对

圆锥曲线重新研究。圆锥曲线本来早在古希腊时代就被阿波罗尼（Apollonius，约公元前262—190）等人认真研究过，不过在十六世纪之前人们只是出自纯数学的兴趣，而且是用静态的观点来研究图形的性质，即把它们看作是由平面从不同角度截锥体而来的。行星绕日运动和抛体运动则要求人们用运动和变化的观点来研究圆锥曲线，即把曲线看成是经物体运动而生成且随时间而变化着的轨迹。

第二，求变速运动物体的速度或路程。已知变速运动的物体在某段时间内经过的路程，求物体在任意时刻的速度和加速度；反过来，已知物体运动的速度或加速度，求某段时间内经过的路程。求物体运动的速度或路程是一个古老问题，但以前人们处理的大都是匀速运动的情况，对于变速运动，只能采用求平均速度的方法给出问题的近似解。自然科学的发展则要求精确地求出变速运动的物体在某一时刻的瞬时速度，或在某一段时间内所经过的路程。这就使传统的数学方法完全不适用了。

第三，求曲线在任一点的切线。这个问题主要来源于光学和力学的需要。在光学中，要研究光线在不同介质的通道，这就涉及到光线在曲面上的反射角或进入另一个介质的折射角，而这些角是光线同曲线的法线所夹的角，法线又是垂直于切线的，所以问题就归结于求出曲线的切线；在力学中，运动物体在它轨迹上任一点的运动方向，实质上就是轨迹上这一点的切线方向。

第四，求变量的极值，即求变量在某种条件下所能达到的最大值或最小值。力学和天文学涉及到的这类问题较多。例如，炮弹运行的水平距离是一个随发射角的变化而变化的变量，求发射角为多大时这个水平距离最大。再如，行星运动与太阳距离是个变量，求这个变量所能达到的最大值和最小值

等等。

第五，计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体的重心、变密度物体的重量以及大质量物体之间的引力等。求积问题也是一个古老的问题。古希腊学者为解决这类问题曾创立穷竭法，但这个方法缺乏一般性，只能解决某些特殊问题。求物体的重心、变密度物体的重量以及大质量物体之间的引力，就其思想方法而言，也属于这一类问题。

不难看出上述五类问题有一个共同的特征，就是要求把"变量"作为其研究对象。这些问题成为十六、十七世纪数学研究的中心课题，正是对这个中心课题的深入研究，导致了变量数学的产生。

2.变量数学的产生及其意义

变量数学产生于十七世纪。它大体上经历了两个具有决定性的重大步骤。第一个步骤是解析几何的产生。1637年，法国数学家笛卡儿发表《方法论》一书，书后有三篇附录，其中一篇叫做《几何学》。在这篇附录中，他首次明确提出了点的坐标和变数的思想，并借助坐标系用含有变数的代数方程来表示和研究曲线。这篇附录的问世，是解析几何产生的重要标志。和笛卡儿同时代的法国业余数学家费尔马，对解析几何的创立也作出了突出的贡献，在数学史上和笛卡儿一起分享着解析几何创立者的荣誉。但他关于这方面的文章直到1679年，即他去世两年之后，才发表出来。

变量数学产生的第二个决定性步骤是微积分的创立。十七世纪许多著名数学家、天文学家和物理学家都参与了这项重大发明的研究工作。其中贡献最大的要属牛顿(I.Newton，1642—1727)和莱布尼茨(G.W.Leibniz，1646—1716)两个

人。牛顿主要是从运动学来研究和建立微积分的。他的微积分思想最早出现在1665年5月20日的一页文件中。这一天可做为微积分诞生的日子。他写了《曲线求积论》(1704年出版)和《流数术方法和无穷级数》(1736年出版)两部专论微积分的著作。这两部著作集中体现了他在微积分方面的研究成果。他称连续变量为"流动量",用符号v、x、y、z等表示。把它们的导数称为"流数"(或"流动率","速度","迅度"),并用加小点的字母如$\dot{x}$表示。他还使用了术语"刹那"(或"瞬"),相当于表示变量的微分dx、dy等。

莱布尼茨是一个多才多艺的学者,一生中突出的贡献之一是独立地完成微积分学的创立工作。他创立微积分主要是从几何学的角度出发。他的微积分思想最初体现在1675年的手稿之中。1684年,他在《学艺》杂志上发表的论文《一种求极大极小和切线的新方法,它也适用于分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算》,是历史上最早公开发表的关于微分学的文章。1686年,他在该杂志上又发表了历史上第一篇关于积分学的文章。他还是历史上最杰出的符号创造家之一。他所发明的微积分符号,远远优于牛顿的符号,对微积分的发展有重大的影响。现今通用的符号dx、dy、$\int$等,就是由莱布尼茨精心创造的。

变量数学产生的两个主要步骤都是在十七世纪完成的,因此十七世纪也就成了常量数学向变量数学转变的时期。变量数学的产生,有着极其重要的意义,其具体表现可概括为以下三个方面。

首先 变量数学的产生,使数学自身在思想方法上发生了重大的变革,由此带来整个数学面貌的根本性改观。通过这次变革,常量数学的许多分支学科,诸如代数、几何、三角和数论等,由于变量数学的渗透而在内容上得到了极大的丰富,在

思想方法上发生了深刻的变化。例如可把解方程理解为求函数的零点，借助分析的方法给出了代数基本定理的严格证明等等。通过这次变革，新的数学分支学科雨后春笋般地涌现出来，诸如解析数论、微分几何、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论、级数论、差分学、实变函数论和复变函数论等。总之，从变量数学产生后，变量数学的思想方法很快就在整个数学中占据了主导地位，长时期内规定和影响着数学发展的方向。

其次，变量数学的产生，使自然科学描述现实物质世界的运动和变化过程成为可能。在现实世界中，“静”和“常”总是暂时的、相对的，“动”和“变”则是永恒的、绝对的。这正如恩格斯所描述的：“整个自然界，从最小的东西到最大的东西，从沙粒到太阳，从原生生物到人，都处于永恒的产生和消灭中，处于不断的流动中，处于无休止的运动和变化中。”[1] 自然科学的对象是运动变化着的物质世界，变量数学的产生，为自然科学定量地描述和研究物质世界的运动、变化规律提供了强有力的工具。恩格斯十分重视微积分在自然科学中的作用，他指出：“只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程：运动。”[2] 自变量数学产生以后，数学在自然科学各部门的应用范围得到了空前的扩展。

第三，变量数学的产生具有重大的哲学意义。变量数学的基本概念变量、函数、极限、导数和微分，以及微分法和积分法，从本质上看，不外是辩证法在数学上的运用。恩格斯曾对此明确指出：“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学”。[3] 可以

1) 《自然辩证法》，人民出版社，1971版年，第16页。

2) 同上，第249页。

3) 《自然辩证法》，人民出版社，第236页。

说，变量数学的产生，是辩证法在数学中取得的一次根本性胜利。正象恩格斯所指出的："在一切理论成就中，未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。"[1]随着变量数学的思想与方法在数学中的全面渗透，数学日益成为"辩证的辅助工具和表现方式。"[2]这不仅为后来数学的健康发展提供了正确的思维方法，而且又为辩证法的普适性从数学上提供了生动的例证。

三、从必然数学到或然数学

从必然数学到或然数学，是数学思想方法的又一次重大转折。所谓必然数学，是指描述和研究现实世界的必然现象及其规律的那部分数学，它包括通常的算术、三角、几何、代数、微积分、微分方程论、积分方程论和函数论等分支学科。必然数学在科学技术、社会实践以及日常生活中有着广泛的应用，成为人们认识和改造世界的有力工具。然而，在研究和解决现实世界大量存在的偶然现象中的量及其关系问题上，必然数学就无能为力了，需要创造新的数学方法。于是，一个新的数学领或——或然数学便被开拓出来了。

1.随机现象及其统计规律

人们在实践活动中常常遇到两类性质截然不同的现象：一类是必然现象，即这种现象在一定的条件下必然会发生某一种结果，或者必然不会发生某一种结果。例如，在标准大气

1）《自然辩证法》人民出版社，第244页。

2）《自然辩证法》，人民出版社，第3页，

压和温度T在0 °C<T<100°C的条件下，水一定处于液体状态而不能处于气体或固体状态。另一类是随机现象（或称偶然现象），即这种现象在一定条件下可能会发生某一种结果，也可能不发生这一结果，例如投掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面。

对于必然现象，条件和结果之间存在着必然性联系，即条件具备时，某种结果必然会发生，因此可由条件预知结果如何。这一点正是必然数学的现实基础。例如，在物理学、天文学和技术科学中，可用微分方程来定量地描述某些必然现象的运动和变化过程，具体地说就是，只要建立起相应的微分方程，并知道问题的初始条件，就可以通过求解微分方程来预知未来某时刻运动的状态和变化的结果。法国天文学家勒维烈(U.J.Leverrier，1811—1877)和英国天文学家亚当斯(J.C.Adams，1819—1892)在对天体运动微分方程数值分析的基础上，预言海王星的存在及其在天空中的位置，就是必然数学取得成功的一个典型例子。

对于随机现象，由于条件和结果之间不存在必然性联系，因此不能用必然数学来加以定量描述。例如一个充有大量气体分子的容器分子间的碰撞是杂乱无章的，每个分子运动的速度和方向带有明显的随机性，这就使得各个分子对器壁的碰撞所产生的压力的大小也具有随机性。显然，要想精确描述各个分子对器壁压力的大小，是不可能的。再如，投掷一枚质量均匀的硬币，要预先计算出它一定会出现正面或一定会出现反面，也是无法办到的。但是，这并不意味着随机现象不存在着规律，也不意味着我们不能从数量上描述和研究随机现象的规律。就全体分子对器壁的压力而言，实验表明，密闭容器中的气体，在温度保持不变的情况下，尽管各个分子运动的速度和方向是随机的，但器壁所受的总压力却是一个确

定的值。这就告诉我们，大量气体分子协同作用的结果呈现出某种规律性。实验还表明，多次重复地投掷一枚质量均匀的硬币，出现正面的次数与总投掷次数之比总是接近于$\frac{1}{2}$，而且随着投掷次数的增加，这个比越来越接近于$\frac{1}{2}$。历史上曾有人对此作过试验，下表给出的是其中几个著名者的测验结果。

试验者	试验总次数（n）	出现正面的次数（m）	出现正面的频率（$\frac{m}{n}$）
德·摩根	2,048	1,061	0.518
蒲丰	4,040	2,048	0.5069
K·毕尔生	12,000	6,091	0.5061
K·毕尔生	24,000	12,012	0.5005
维尼	30,000	14,994	0.4998

上述事实表明，随机现象从个体上看，似乎没有什么规律存在，但当它们大量出现时，从总体上却呈现出一种总体规律性，这就是统计规律性。这种统计规律性的存在，就是或然数学的现实基础。

统计规律性是针对大量随机现象而言的，在这里“大量”是描述这种规律性的必要条件。所谓“大量”，一般是指两种情况：其一是某一随机现象在相同的条件下多次甚至无限地重复出现，诸如“投掷硬币，出现正面”，“发射炮弹击中目标”，“检验零件，质量合格”等；其二是众多的同类的随机现象同时存在，诸如“容器中的气体分子”，“发芽实验槽中的种子”，“电子束中的电子”等。

在随机现象中，可能发生的那个结果称为随机事件，一般用大写字母A、B、C表示。对随机事件发生可能性的大小进行度量，是或然数学的基本内容之一。这个可能性大小是用概率来描述和表示的。求一个随机事件A发生的概率的基本方法是，先求出事件A发生的频率$\frac{m}{n}$，其中n为试验的总次数，m为事件A发生的次数。增加试验次数，频率所趋向稳定的数字就是该随机事件的概率，记为$P(A)$。不难看出，投掷硬币出现正面的概率为$P(A)=\frac{1}{2}$。由于任何事件A发生的次数不可能大于试验总次数，也不会是负数，所以随机事件A的概率总是在0、1之间，即$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。当$P(A)=1$时，事件每次都发生，$A$称为必然事件；当$P(A)=0$时，事件每次都不发生，$A$称为不可能事件。这两种现象实际上属于必然现象。

或然数学的另一个重要概念是随机变量。它是随机事件本身的数量表示，常用小写的x、y、z来表示。如果随机变量所有可能的取值能够按一定次序一一列举，这样的随机变量称为离散型随机变量；反之，称为非离散型随机变量。随机变量的引入，对于研究随机现象的统计规律有着重要意义，它把对随机事件的研究转化为对某些变量的研究。例如，投掷硬币"出现正面"和"出现反面"这两个事件，可分别用"$x=1$"和"$x=0$"表示。那么，式子$P(x=1)=1/2$就表示出现正面的概率为1/2，$P(x=0)=1/2$表示出现反面的概率也是1/2。随机变量的引入，不仅为或然数学使用必然数学的思想方法提供了条件，而且还为或然数学的思想方法向必然数学的渗透提供了可能。由一般变量到随机变量，是人们对变量认识上的一次重大突破。

由于随机现象的统计规律是一种总体规律，必须在大量

同类随机现象中才能呈现出来，所以或然数学在研究方法上有其自身的特殊性。统计方法就是它的一种基本研究方法。统计方法的基本思想是，从一组样本分析、判断整个系统的状态，或判定某一论断能以多大的概率来保证其正确性，或算出发生错误判断的概率。统计方法是“由局部到整体”、“由特殊上升到一般”，是归纳法在数学上的具体应用。它在不同的应用领域有不同的表现形式，由此形成了许多专业统计方法，如生物统计、人口统计、教育统计、森林统计、水文统计、气象统计、医学统计、经济统计、工业统计以及田间试验统计等等。

2.或然数学的由来和发展

或然数学目前已成为具有众多分支学科的庞大的数学部门。其中最基本的分支学科是概率论和数理统计。总的看来，概率论重在理论上的分析，数理统计重在应用上的研究。通常把概率论的创立作为或然数学产生的主要标志。

概率论创立于十七世纪，但它的思想萌芽至少可追溯到十六世纪。据史料记载，最先使数学家们对偶然现象产生兴趣的问题是由赌博者提出的：两个骰子掷出一特定总点数的机会以及赌注的分配问题。例如，意大利数学家卡当和塔塔利亚(N.Tartaglia,1500—1557)曾计算过掷两颗或三颗骰子时，在所有可能方法中有多少种方法能得到某一预想的总点数。卡当还专门著有《论赌博》一书，此书在他死后的1663年出版。

促使概率论产生的直接动力是来自保险事业的需要。十七世纪工业和商业的迅速发展，激发了保险事业的兴起。保险公司为了获得必要的费用和利润，需要预先确定象火灾、水灾和死亡等意外事件发生的概率。例如，寿命保险价格就

是根据象下面那样的死亡数表，通过计算不同年龄的死亡概率确定的。

死亡数表的一部分

年　龄	活到该年龄的人数	在该年龄中死亡的人数
10	100,000	749
15	96,285	735
20	92,637	723
25	89,032	718
30	85,441	720
40	78,106	765
50	69,804	962
60	57,917	1,546
70	38,569	2,391
80	14,474	2,091
90	847	385

从上表看出，如果一个人四十岁，那么他当年死亡的概率是$\frac{765}{78106}=0.0098$，若有100个40岁的人参加人寿保险，每人一年付a元的保险费就可得到b元人寿保险金，那么他们将交付$100a$元保险费。预期在这100人当年死亡的人数是$100\times0.0098=0.98$。因此，保险公司预期要付出$0.98b$元人寿保险金。收入与支出的差$100a-0.98b$，就是公司能够用来作为经费和利润的钱数。

由于赌博中的概率问题最为典型，因此，从这类问题着手去探求偶然现象的数量规律，便成为当时数学研究的一个重

要课题。1654年，有叫贡博（A.Gombaud）和梅雷（C.d.Meré，1610—1685）的两名赌徒向帕斯卡（B.Pascal，1623—1662）提出一个他们思考多年而不得其解的问题：两人相赌，谁先赢n局谁获得赌注，可是，当一个人赢了$p(p<n)$局，另一个人赢了$q(q<n)$局之时，就中止赌博，赌本应该怎样分配才算合理？帕斯卡认真研究了这个问题，并把这个问题连同自己的解法寄给了费尔马，和他进行讨论。荷兰著名天文学家、物理学家惠更斯（C.Huygens，1629——1695）访问巴黎时，得知两人的工作，十分感兴趣。他专心研究了赌博中的计算问题，于1657年出版《关于骰子游戏或赌博的计算》一书。帕斯卡、费尔马和惠更斯的工作，标明概率论已成为具有自己特定对象的一门学科。

由于概率论很快就在保险理论、人口统计、射击理论、年度预算、产品检验以及天文学和物理学中得到广泛的应用，因此，从十七世纪起一直成为数学家关注并作出许多成果的一个重要研究领域。其中值得提出的数学家有：

雅各·伯努利（J.Bernoulli，1654—1705），著有《猜度术》（1713），提出著名的"伯努利定理"。这一定理是"大数定律"的早期形式。

棣美佛（A. d. Moivre，1667—1754），著有《机会的学说》，提出现今称为"棣美佛-拉普拉斯中心极限定理"的一种特殊情况。

辛普生（T.Simpson，1710—1761），著有《论机会的性质与规律》（1740），这是一部重要的概率论著作。

蒲丰（C.d.Buffon，1707—1788），著有《或然算术试验》（1760年完成，出版于1777年），提出著名的"蒲丰问题"（或投针问题）：在一张纸上画一些平行线，相邻的每两根距离为$2a$，将一根长为$2l(l<a)$的针任意投在纸上。这时，针和纸上的

平行线可能相交，或不相交。多次投掷，可以证明针与任一平行线相交的概率是$p=\frac{2l}{a\pi}$，这是用概率模型来做统计试验计算的一个典型问题[1)]，后来发展为著名的蒙特卡洛方法，可以解决许多繁难的积分、线性方程和偏微分方程等问题。

拉普拉斯(P.S.Laplace,1749—1827)，著有《分析概率论》(1812)和《概率的哲学探讨》(1795年完成，出版于1814年)等书。这两本书总结了整个前一时代的研究成果，明确给出了概率的古典意义，系统地叙述了概率论的基本定理，给出了著名"棣美佛-拉普拉斯中心极限定理"的理论证明。他把概率论有效地应用于误差统计、人口统计、通信和天文学等方面，并得到许多重要的成果。

高斯和泊松(S.D.Poisson,1781—1840)，也对概率论作出了突出贡献。高斯奠定了最小二乘法和误差理论的基础。泊松推广了大数定理和中心极限定理，提出一种重要的概率分布——泊松分布，在《打靶概率研究报告》论文中还专门研究了射击理论中的概率论问题。

十九世纪末、二十世纪初，俄罗斯数学家切比雪夫(П.Л.Чебышев,1821—1894)、马尔科夫(А.А.Марков,1856—1922)和辛钦(А.Я.Хинчин,1894—1959)等人，在概率论的现代理论和应用方面作出了显著贡献。著名的马尔科夫过程，即无后效性的随机过程，已成为现代概率论的一个新分支，在原子物理、理论物理、化学、公用事业等方面都有广泛的应用。

我国数学家在概率论的现代理论研究上取得了许多重要成果，青年数学家侯振廷的著名论文《Q过程的唯一性准则》，

1）此式重新整理，亦可做为求圆周率π的公式：$\pi=\frac{2l}{ap}$。

于1974年发表在《中国科学》第二期上，得到国内外学者的高度评价，并荣获1978年度英国R. 戴维逊奖。

由于随机现象在现实世界中大量存在着，因此随着科学技术和社会实践的发展，以概率论为基础的或然数学很快地蓬勃发展起来，并越来越显示出它的巨大威力。

首先，或然数学与必然数学、自然科学和社会科学相互作用产生出许多新的学科，如平稳随机过程论、马尔科夫过程论、随机微分方程论、多元分析、试验分析、统计物理学、统计生物学、统计医学和概率逻辑等。

其次，或然数学的理论和方法，在科学技术、国防、工农业和经济各部门得到广泛的应用。特别是在电子技术、自动控制、气象预报、地震预报、地质勘探、企业管理、公共事业以及国防中的防空、巡逻搜索等部门已经取得明显的社会效益。

四、从明晰数学到模糊数学

人们在社会实践和科学研究中遇到的各种量，依其界限是否分明可分为这样两类：一类是明晰的，另一类是模糊的。用于描述明晰量及其关系的变化规律的数学称为明晰数学。明晰数学是研究明晰量的有力工具，但对模糊的量它就不适用了。人们在寻找处理模糊量及其关系变化规律的数学方法过程中，创立了一门新的数学分支学科——模糊数学。模糊数学的产生，是数学思想方法的又一次重大转折。

1.模糊数学产生的历史必然性

模糊数学的产生有其历史必然性，它是把数学应用范围从明晰的量扩大到模糊的量的结果。

首先，从人们认识和改造世界来看，随着社会实践的深化和科学技术的发展，所处理和研究的对象越来越复杂，例如生态系统、人脑系统、航天系统以及社会的各种系统等。而系统越复杂，就越难以用传统数学对它们加以精确地描述和有效地处理。对这种复杂性和精确性之间的尖锐矛盾，模糊数学的创立者查德（L.A.Zadeh）总结出一条"互克性原理"。他说："当系统的复杂性日益增长时，我们作出系统特性的精密然而有意义的描述的能力将相应降低，直至达到这样一个界限，即精密性和有意义（或适当性）变成两个几乎相互排斥的特性"。[1] 这就是说事物的复杂性与描述上的精确性通常是不相容的，事物的复杂性越高，传统数学描述和处理它的能力也就越低。为解决研究对象复杂性与研究手段精确性之间日益尖锐的矛盾，建立一种处理具有模糊量的事物的数学方法就变得十分必要了。

其次，人们在社会实践、日常生活以及科学研究中所遇到的量，绝大部分是模糊的量。例如"老年"、"中等"、"长寿"、"短命"、"附近"、"偏上"、"高压"、"低温"等。对这些模糊的量，只有用一种"模糊"的方法去描述、刻划和处理，才能使结果更符合实际、更精确。因此，随着自然科学、社会科学以及思维科学数学化发展趋势的加强，对"模糊"的方法进行研究的要求也就越加迫切。

特别值得指出的是，模糊数学的诞生和电子计算机的发展密切相关。计算机科学是模糊数学诞生的摇篮。我们知道，电子计算机发展的一个重要方向是模拟人脑的思维，以便能够应付和处理复杂多变的环境。人的思维活动是在逻辑思

1） 转引自傅世侠主编：《科学前沿的哲学探索》，辽宁人民出版社，1983年版，第24页。

维、形象思维和灵感思维的综合作用下进行的。而形象思维和灵感思维本身就具有很大的模糊性，正是这种模糊性，才使得人的大脑灵活地进行思维。传统数学无法描述和处理事物的模糊性，也就无法真实地反映人脑的思维活动，以传统数学及二值逻辑为基础的电子计算机，也就不具备象人脑那样灵活处理事物模糊性的能力。这对电子计算机"智能"的发展，无疑是一个极大的障碍。为了把人的自然语言能够作为算法语言编入程序，让计算机能够描述和处理事物的模糊性，从而完成更为复杂的任务，就必须建立起相应的能够描述和处理模糊的量及其关系的数学方法。这就是模糊数学产生的直接背景。

美国加利福尼亚大学自动控制专家L. A. 查德，为了从根本上解决计算机发展中的这个矛盾，重新研究了数学的基础集合论，提出和建立起一种新的集合理论——模糊集合论。1965年，他发表了题为《模糊集合》("Fuzzy sets")等两篇论文。这两篇论文的问世，标明模糊数学的诞生。由于模糊数学是在社会实践和科学技术迫切需要下应运而生的，因此，虽然它的历史很短，但对于它的研究，无论基础理论还是实际应用，都已得到了很大的发展。

在理论研究方面，首先，模糊集合概念本身不断得到扩展，产生出许多不同类型的模糊集合，如L——模糊集合，R——模糊集合．Z型模糊集合和n级模糊集合等。其次，模糊数学的内容日渐丰富。所研究的课题已涉及到广泛的范围，如模糊数、模糊关系、模糊图、模糊向量、模糊关系方程、模糊映射及变换、模糊概率、模糊判断、模糊规划、模糊逻辑、模糊语言、模糊识别和模糊控制等等。

在应用研究方面，模糊数学的思想与方法正在广泛渗透到科学和技术的各个领域，如物理学、化学、生物学、医学、心

理学、气象学、环境科学、管理学、经济学、情报学、语言学、逻辑学、系统论、信息论、控制论以及人工智能等。同时，在农业，林业、建筑、采矿、冶金、地质、机器检修等许多国民经济领域都已取得初步的成果。模糊数学的理论和应用研究相结合，是模糊数学发展的一个重要课题。

2.模糊集合及其隶属函数

现代数学与集合论密切相关。明晰数学的基础是普通集合论，模糊数学的基础是模糊集合论。

普通集合论的对象是普通集合即明晰集合，对于这种集合，一个事物与它有明确的隶属关系。要么属于，要么不属于，两者必居其一，不能模棱两可。这种关系可用特征函数$A(u)$表示：

$$A(u)=\begin{cases}1 & \text{当}u\in A\text{时}\\ 0 & \text{当}u\notin A\text{时}\end{cases}$$

特征函数是一种二值函数，它只能表示事物的“非此即彼”状态，不能表示事物在中介过渡时所呈现出的“亦此亦彼”性。这正是普通集合论的局限性之所在。

与普通集合相区别，模糊集合所表示的概念没有明晰的外延。对于这种集合，一个事物与它没有绝对分明的隶属关系，即不能用简单的“属于”和“不属于”来描述事物和它的关系。例如，以年龄U为论域，取$U=[0,100]$，$\underset{\sim}{O}$、$\underset{\sim}{Y}$分别表示U中的子集“年老”和“年轻”，那么，这两个子集就是模糊子集，因为“年老”和“年轻”是两个模糊概念，它们没有绝对分明的界限。事实上，如果我们取年龄为49岁，那么，我们很难说它一定属于“年老”还是“年轻”。

普通集合由特征函数来描述，模糊子集则由隶属函数来刻划。隶属函数在模糊数学中占有着突出的地位。它是将特征函数由二值{0，1}推广到[0，1]闭区间上的任意值。隶属函数通常表示为$\mu(x)$，它满足

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant 1 \quad (\text{或记作}\ \mu(x) \in [0,1])$$

查德于1965年给出模糊子集如下的定义：

所谓给定了论域U上的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，是指：对于任意$U \in U$，都指定了一个数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \in [0,1]$，叫做$u$对$\underset{\sim}{A}$的隶属度。映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}:\ u \to [0,1]$$
$$ul \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

叫做$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。这样，模糊子集就完全由其隶属函数所刻划。隶属函数依问题不同有不同的表达形式和具体内容。下面给出两例。

某小组有五个同学，记作x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，取论域为$U=\{x_1、x_2、x_3、x_4、x_5\}$。现分别对每个同学的性格稳重程度打分，按百分制给分，再都除以100 这里实际上就是给定一个从U到[o，1]闭区间的一个映射。如：

x_1打85分，即$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)=0.85$

x_2打75分，即$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)=0.75$

x_3打98分，即$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3)=0.98$

x_4打30分，即$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4)=0.30$

x_5打60分，即$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_5)=0.60$

这样就确定了U中的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，它表示小组的同学对"性格稳重"这个模糊概念的一个描述。

以年龄为论域，取$U=[0,100]$，查德曾给出"年老"$\underset{\sim}{O}$与"年轻"$\underset{\sim}{Y}$两个模糊子集的隶属函数如下：

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 50\text{时}\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & \text{当} 50<x\leqslant 100\text{时}\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 25\text{时}\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & \text{当} 25<x\leqslant 100\text{时}\end{cases}$$

(图2.1)、(图2.2)分别表示这两个隶属函数。

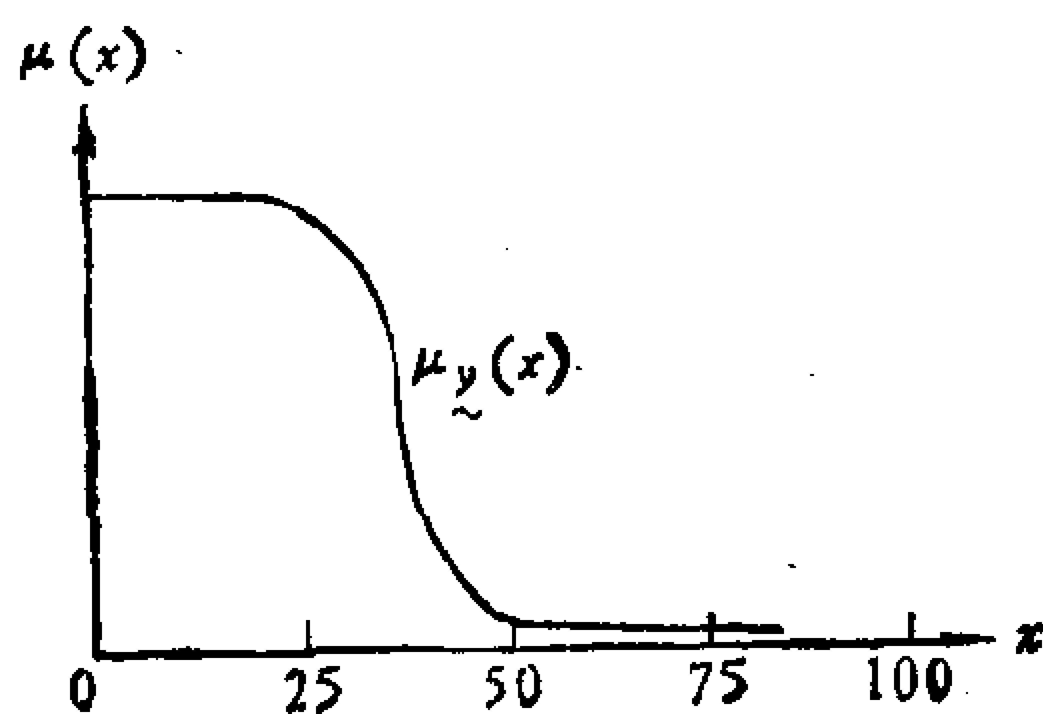


图2.1 “年轻”的隶属函数

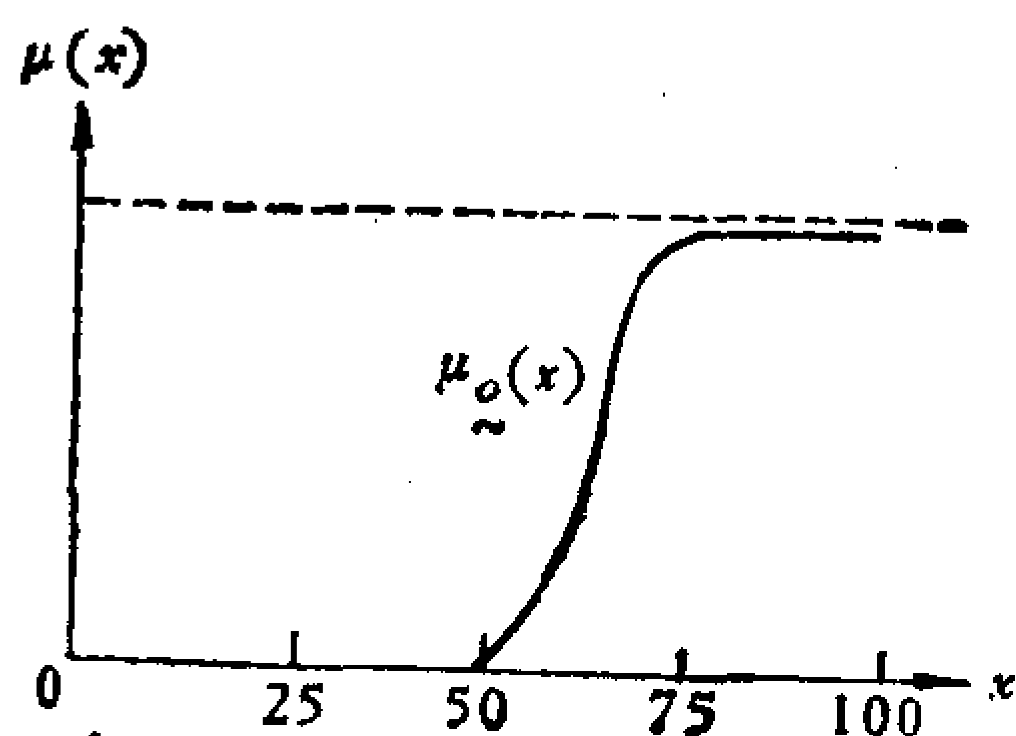


图2.2 “年老”的隶属函数

从图中可以明显看出，凡小于25岁和大于75岁的人，都分别明晰地属于“年轻”和“年老”；而大于25岁、小于75岁之间的人都处于“年轻”到“年老”的中间过渡状态。

有限论域上的模糊子集，可表示成向量形式：

$$\underset{\sim}{A}_n=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$$

其中 $\mu_i\in[0,1]$ 是第i个($i=1,2,\cdots n$)元素对模糊子集的隶属度。例如，对于第一个例子有：

$$\underset{\sim}{A}_5=(0.85,\ 0.75,\ 0.98,\ 0.30,\ 0.60)$$

查德的记法是，若$U=\{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\}$，

则$\underset{\sim}{A}_n=\sum_{i=1}^{n}u_i/x_i$或$\underset{\sim}{A}_n=\bigcup_{i=1}^{n}u_i/x_i$对于上例有：

$$\underset{\sim}{A}_5=0.85/x_1+0.75/x_2+0.98/x_3+0.30/x_4+0.60/x_5$$

注意，这里的“＋”号决不表示分式求和，只是一种表示符号，其“分母”表示论域U的元素，“分子”表示相应元素的隶属度。

还有一种序偶表示法：

对$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$和$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$有

$\underset{\sim}{A}=\{(\mu_1 x_1), (\mu_2, x_2), \cdots, (\mu_i, x_i)\}$

其中(μ_i, x_i)称为单点，$i=1, 2, \cdots n$。

对于无限域上的模糊子集，可将查德的记法加以推广，不论U是有限的还是连续的，都可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int_{x\in U}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x$$

这里积分号不是普通积分的意义，也不是求和，而是表示U的各个元素与隶属度对应关系的一个总括。

普通集合与模糊集合之间的关系，可由特征函数与隶属函数之间的关系来刻划。当隶属函数$\mu(_{\underset{\sim}{A}})$的值域取［0，1］闭区间的两个端点即取｛0，1｝两个值时，隶属函数$\mu_A(u)$便退化为特征函数$A(u)$，模糊子集$\underset{\sim}{A}$也就退化为一个普通子集A。由此可见，普通集合是模糊集合的特殊情况，而模糊集合是普通集合的推广。这就告诉我们，模糊集合与普通集合有着辩证统一的关系，它们既相互区别，又相互联结，而且在一定条件下相互转化。正因为如此，模糊数学与明晰数学有着不可分割的内在联系：模糊数学的概念是明晰数学概念的推广和发展，模糊数学广泛使用着明晰数学的方法。

人类对现实世界“量”规律的探索，是一个永无完结的认识过程。在未来数学发展的进程中，还会出现新的重大转折。

特别是当代电子计算机的发展，给数学的思想方法带来了巨大的冲击，传统的单纯"人脑"支配"手工操作"的数学研究，开始由"人—机"系统来代替，数学机械化的思想已初露端倪。可以预想，电子计算机的进一步发展必将使数学在思想方法上发生根本性变革，并由此引起数学新的重大转折。

第三章　数学研究的几种非常规方法

数学研究是高度复杂、极富创造性的一种认识活动，它不仅需要精湛而扎实的数学知识，而且还需要正确而灵活的研究方法。数学研究的各种方法，按其是否具有明确的逻辑结构和固定模式，可分成常规方法和非常规方法两大类。常规方法包括归纳和演绎、类比和分类，分析和综合等；非常规方法包括直觉思维、逆向思维、研究错误与失败以及美感等。非常规方法的一个共同特点是不受某种固定逻辑模式的限制，因而具有鲜明的灵活性和创新性，常常成为提出数学新思想、创立数学新理论的有力工具。下面仅对直觉思维、逆向思维，以及研究错误与失败的意义和作用，作点初步分析。

一、直 觉 思 维

直觉思维作为一种特殊的心理现象，通常具有以下两个基本特点：

第一、非逻辑性和下意识性，即不受已有理论框架和逻辑规则的束缚，常常出现在人的意识活动的边缘。

第二、突发性和偶然性，即出现迅速，过程暂短，难以事先预料。

直觉思维又可分为直觉、灵感和想象三种具体形式。直觉表现为对事物本质的一种极为敏锐的深入洞察，也就是对所探求问题答案的“一眼看穿”；灵感表现为人们对长期探索

而未能解决的问题的一种突然性领悟，也就是对问题百思不得其解时的一种"茅塞顿开"；想象则表现为对记忆中已有表象的一种创造性加工和改造。

数学家们十分重视直觉思维在数学研究中的作用，把它视为数学创造的重要工具。法国著名数学家彭加勒(H.Poincaré,1854—1912)曾经指出："逻辑是证明的工具，直觉是发明的工具。"，"逻辑可以告诉我们走这条路或那条路保证不遇见任何障碍，但是它不能告诉我们哪一条道路能引导我们到达目的地。为此，必须从远处瞭望目标，教导我们瞭望的本领是直觉。没有直觉，数学家便会象这样一个作家：他只是按语法写诗，但是却毫无思想。"[1]和他同时代的数学巨匠希尔伯特(D.Hilbert,1862—1943)也曾强调指出："数学知识终究是依赖于某种类型的直观洞察力。"[2]直觉思维之所以受到数学家们的高度重视，是因为它有着逻辑思维所不能替代的特殊作用，这种特殊作用主要表现在：

（1）当研究问题的思路同时存在几种可能时，能够帮助人们快速从中作出抉择。人们在尝试解决复杂数学问题时，大都预先要遇到几种可能的思路，究竟先选择哪个思路？放弃或暂时搁置哪个思路？单凭逻辑思维往往是解决不了的，这就常常需要求助于直觉思维，即凭借直觉去辨识、去选择。

罗巴切夫斯基发现非欧几何与希尔伯特推广二次互反律这两个数学史上的典型事例，就清楚地说明了这一点。

我们知道，非欧几何并非是罗巴切夫斯基预先想要构造的，而是他在用反证法试证"第五公设不可证"的过程中，作出的伟大发现。他当时的思想出发点是：为证"第五公设不可

1）转引自李醒民：彭加勒科学方法论的特色，《哲学研究》，1984年5期，第39页。

2）康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年版，第245页。

证”，首先用第五公设的否定命题和其它公理组成一个新的公理系统，然后由此展开逻辑推演，看是否出现逻辑矛盾？假设第五公设是一个可证的命题，那么一定能推演出逻辑矛盾来，至少第五公设和它的否定命题就是一对相互矛盾的命题。如果推演不出逻辑矛盾，就反驳了第五公设可证的假设，从而也就间接证得“第五公设不可证”。为此，他对第五公设的等价命题普列菲尔公理：“过平面上直线外一点，只能引一条直线与已知直线不相交”作了否定，得到否定命题：“过平面上直线外一点，至少可作两条直线与已知直线不相交”，并由此展开逻辑推演。推演不多几步，他就得到一连串“古怪命题”，这些命题不仅与欧氏几何原理相冲突，而且还与人们的经验认识相背离。可是，经过仔细审查，他并没有发现任何逻辑上的矛盾。那么，是否在往后的推演中永远也不会出现矛盾呢？是继续无休止地推演下去，还是就已有的命题作出判断？面对这一抉择，罗巴切夫斯基凭借他的深邃洞察力果断地给予了肯定的回答：这些奇异的命题属于一种逻辑无矛盾的新几何。如果罗巴切夫斯基拘于严格的逻辑程序，等到从逻辑上严格给出新几何的无矛盾性证明之后，再承认和研究它，那么，非欧几何的建立不知要延迟到哪一年。事实上，非欧几何的无矛盾性证明，只是在罗巴切夫斯基去世12年之后的1868年，才由意大利数学家贝特拉米(E.Beltrami，1835—1899)严格给出。由此可见，直觉思维在罗巴切夫斯基创立非欧几何，特别是在作出无矛盾性判断上，确实发挥了重大作用。

下面再分析一下希尔伯特推广二次互反律的工作。二次互反律是数论中的一个重要论断，它说的是：如果p和q是不同的奇素数，那么

$$(p/q)(q/p)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}。$$

其中符号(p/q)表示

$$(p/q)=\begin{cases}1 & \text{当}p\text{是}q\text{的二次剩余时}\\-1 & \text{当}p\text{是}q\text{的非二次剩余时}\end{cases}$$

这个论断最初由欧勒(L.Euler,1707—1783)于1772年发现,但没有公开发表。1785年,勒让德(A.M.Legendre,1752—1833)又独立发现了它,可他没能给出证明。1796年,19岁的高斯首次给出它的严格证明。由于这个定理描术了一对素数和以它们为模的二次剩余之间所存在的内在联系,无论从形式上还是从内容上都显得十分漂亮,因而博得数学家们对它的一致赞美。高斯称它为数论中的一颗"宝石",一生中曾先后五次返回到这个定理,每一次都给出完全不同的证明方法。继高斯之后,数学家们又给出了五十多种其它形式的证明。

能否把二次互反律推广到代数数域?这是十九世纪数论研究中的一个关键性课题。许多数学家为此作出了巨大的努力,但长期没能取得重大的进展。1897年,希尔伯特决心攻下这个难题。他一贯乐于钻研最困难的问题,并善于通过直觉预先猜出问题的最终答案。他的数学洞察力是如此地不寻常,以致有时竟能在相距很远的领域间辨识出隐藏得很深的内在联系。在二次互反律推广问题上,他一开始就凭直觉断言,问题的答案一定存在,并且在没有经过严格推理的情况下,就出人意料地以一种十分简单、优美的形式预言了在代数数域中高于二次的互反律可能是什么样子。尔后的实践则表明,他的数学直觉几乎全部是正确的。不到一年的时间,他就以此为内容发表了一篇纲领性文章《相对阿贝尔域理论》,文中提出了著名的类域理论。《希尔伯特传记》的作者康斯坦西·瑞德(C.Reid)在回忆他的这一工作时写道:"数学直觉的准确性在这里表现得如此明显,这在希尔伯特的工作中是绝无仅

有的。"[1]

（2）当解决问题的逻辑通道阻塞，思路发生中断时，能够帮助人们打破僵局，另辟全新的思路。在研究数学问题时，常常遇到这样的情况：当已有的各种可能方案都尝试过后，问题仍不得其解，就在这时，直觉思维使中断了的思想"电流"突然接通，一个全新的设想或方案一下子跃入脑际，并由此打开通往成功的大门

在数学发现史上，这样的典型事例是胜不枚举的。例如，笛卡儿发现解析几何。早在1617年，笛卡儿在荷兰服役时，就产生了致力于数学的想法。他所选择的课题是如何把长期分道扬镳的代数和几何结合起来，使其互相取长补短。那么，究竟用什么方法才能把代数和几何有机地结合起来呢？这成为他反复思索的一个问题。1619年，他随军驻扎在多瑙河畔的诺伊堡。这些日子，他几乎整日沉迷在思考之中，极力追寻问题的答案。同年11月10日晚，他带着整日思索而不得其解的问题入睡了，一夜接连作了几个梦，梦中找到了他所要找的答案。对此，笛卡儿后来回忆道，受梦的启示，"第二天，我开始懂得这惊人发现的基本原理。"[2]这个基本原理就是坐标几何思想。这里所说的"梦"的启示，实质上就是直觉思维在起着启迪新思路的作用。

又如，彭加勒在定义富克斯函数的变换方法过程中也生动地反映了直觉思维在打开思想僵局中的突发作用。富克斯函数，即单复变自守函数，是圆函数（三角函数，双曲函数和椭圆函数）的一种推广。1880年，彭加勒为寻找富克斯函数的变换方法，进行了长时间紧张的工作，但一直毫无头绪。有一天，

1）康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年版，第71页。

2）转引自梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980年版，第196页。

他打算暂时把工作停下来去乡下旅行，以便放松一下自己的思想。然而，就在他登上马车的一刹那间，一个新颖的思想闯入了他的脑海，使他一下子猜到，问题的答案和以前他所研究的非欧几何变换有关。正如他自己所说的那样："我的脚刚踏上刹车板，突然想到一种设想……，我用来定义富克斯函数的变换方法同非欧几何的变换方法是完全一样的。"[1)]

彭加勒还谈到，有一次，在研究三元二次型的算术变换问题时，他的思想受到了堵塞，没有任何进展。于是他来到海边休息，作一些与所研究问题毫不相干的事情。就在他极力想摆脱有关这个问题的一切思绪时，一个清晰明确的答案突现在他的脑中。他讲道："在山岩上散步的时候，我突然想到，而且想得又是那样简洁、突然和直截了当：不定三元二次型的算术变换和非欧几何的变换方法完全一样。"[2)] 这种下意识的突然发现，恰好体现了直觉思维的创造性功能。

对于直觉思维这种启迪思路、富于创造的作用，许多数学家都有过亲身体会。高斯在一次谈话中指出，他求证数年而不得解决的一个问题，"终于在两天以前我成功了……象闪电一样，谜一下解开了。我自己也说不清楚是什么导线把我原先的知识和使我成功的东西连接了起来。"[3)] 哈密顿曾这样描述过发现四元数的经过："明天是四元数的第十五个生日。1843年10月16日，当我和妻子步行去都柏林途中来到勃洛翰桥的时候，它们就来到了人世间，或者说出生了，发育成熟了。这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是I, J, K之间的基本方程；恰恰就是我以后使用它们的那

1) 转引自W.I.B.贝弗里奇：《科学研究的艺术》，科学出版社，1983年，第74页。

2) 转引自W.I.B.贝弗里奇：《科学研究的艺术》，科学出版社，1983年，第74—75页。

3) 同上书，第75页。

个样子。我当场抽出笔记本，它还在，就将这些做了记录，同一时刻，我感到也许值得花上未来的至少10年（也许15年）的劳动。但当时还完全可以说，这是因我感觉到一个问题就在那一刻已经解决了，智力该缓口气了，它已经纠缠住我至少15年了。"[1] 法国著名数学家阿达玛(J.Hadamard, 1865—1963)也有类似的感受，他回忆道："有一次，在一阵突发的喧哗声中，我自己立即毫不费力地发现了问题的解答……根本不在我原先寻找这个解答的地方。"[2]

(3)当探索的问题涉及未知领域时，能够帮助人们搭起通往未知领域的桥梁。人们在探索数学未知领域时，常常凭借想象先在头脑中塑造出未知对象的各种图景和模型，在主观认识和客观对象之间架起一座由此达彼的桥梁，然后再进行严格的理论论证和实践检验，并从而获得重大突破。爱因斯坦(A.Einstein, 1879—1955)认为，"想象力比知识更重要"，想象力是科学研究中的实在因素。"[3] 列宁曾深刻指出："幻想是极可贵的品质"，"有人认为，只有诗人才需要幻想，这是没有理由的，这是愚蠢的偏见！甚至在数学上也是需要幻想的，甚至没有它就不能发明微积分。"[4] 希尔伯特甚至认为数学比文学更需要想象力。例如，当一名年轻数学家放弃数学而致力文学时，不少人为其感到惋惜，可希尔伯特却对别人说："这很简单嘛！他没有足够的想象力搞数学，却有足够的想象力写小说。"[5]

---

1) M·克莱因：《古今数学思想》第三册，上海科学技术出版社，1980年，第177页。
2) 周昌忠：《创造心理学》，中国青年出版社，1983年，第209页。
3) 《爱因斯坦文集》第一卷，第284页。
4) 《列宁全集》，第33卷，第282页。
5) 转引自康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社1982年，第220页。

数学的历史告诉我们，许多具有突破性的重大发现都曾得助于科学想象的力量。罗巴切夫斯基创立非欧几何就是其中的一个典型。我们知道，非欧几何有一个显著特征，就是它的命题远离经验，"离奇古怪"，难以使人置信，例如，"同一直线的垂线和斜线可以不相交"，"三角形内角和小于二直角"，"不存在相似三角形"，等等。非欧几何的这个特征，从根本上决定了它的发现者必须具有高度的科学想象能力。

与罗巴切夫斯基同时代的德国数学家须外卡尔特(F.K. Schweikart，1780—1859)和塔乌里努斯(F.A.Taurinus，1794—1874)俩，在平行线理论研究中曾推演出一些奇异命题，并且猜测到这些命题可能属于一种新几何，甚至给这种几何命名为"星际几何"。但是，他们不能对这种几何的广阔前景和现实用场作出合理的预想，因而在无人支持的困境下，最终放弃了对"星际几何"的研究。他们踏进了非欧几何的大门，却又中途退了出来，其中一个重要原因，就是他们缺乏丰富的科学想象力，不能架设通往未知领域的桥梁。

罗巴切夫斯基之所以在非欧几何发现上，比他同时代人站得高、看得远，对新几何的前途充满信心，是与他具有高度科学想象力分不开的。他曾以猜想的形式提出第五公设的不可证性，拉开了非欧几何发现的序幕。同样，在创建和完善非欧几何理论的过程中，他又凭借想象的翅膀，拔地而起，突破空间、时间和当代科学水平的限制，提出了许多令人惊叹、具有珍贵科学价值的思想。

例如，罗巴切夫斯基从他给出的平行角解析式出发，以猜想的形式断言，非欧几何是"巨大尺度形式的几何"，适合于大宇宙空间范围。为检验非欧几何的真理性，他曾根据当时的最新天文观测资料，对尽可能大的天体三角形作了角欠计算，算得的结果表明，这个角欠比观测精度还小，因而无法

观测到空间几何的非欧表现。但是，罗巴切夫斯基并不认为他的断言遭到了反驳。在他看来，"空间是无限延伸的，自然界指给我们的是这样的距离，和这个距离相比，甚至我们地球到恒星的距离也是微乎其微的。"[1] 他由此设想，在以天文尺度为单位的巨大宇宙空间，将出现空间几何性质与欧几里得几何的明显差异。罗巴切夫斯基还进而构想，微观领域的几何也是非欧式的。他把非欧几何称为"想象几何"，并且极富创见地向他的同代人宣告："在观测不足的情况下，应当凭理智设想，想象几何可适用于被观测到的世界之外以及分子引力范围之内"。[2]

再如，罗巴切夫斯基还一反常态地提出了只有我们这个时代的人才能理解的几何与力相关的思想。他深刻指出："空间自身是不能单独存在的，因而当我们设想，自然界中的某些力决定一种几何，另一些力决定另一种特殊的几何，那么在我们的头脑中就没有任何矛盾了"。他又指出："力产生一切：运动，速度，时间，质量，甚至距离和角"。[3] 这实质上已经明确指出，空间的几何性质依赖于物质的运动。罗巴切夫斯基的这个思想，是对牛顿绝对时空观和康德先验时空观的尖锐挑战，并且直接通往了相对论和现代唯物主义时空观。

此外，罗巴切夫斯基对非欧几何与欧氏几何的内在联系以及非欧几何在数学上的广阔用场，也作出了深刻的预想。他明确指出："普通几何作为特殊情况包含在想象几何之中，想象几何取无限小线段可转变成普通几何。"[4] 又指出，想象几何"即使在实际测量上还用不上，但它将为几何学在分析学上

1) А.Ц.Норден, Об основаниях Геометрии ГТТИ., 1956, стр.65
2) 同上，стр，46
3) 同上，стр，65
4) 同上，стр，64

的应用开辟一个广阔的新天地"。[1]

罗巴切夫斯基以他的科学想象力，为宇宙空间几何特性所勾画出来的奇妙图景，已经和正在被现代物理学、宇宙学和天文观测所佐证。现代天文观测发现，星光掠过太阳表面时发生偏转，行星绕日轨道在其近日点发生进动。这深刻表明，大质量空间的几何结构是变形的，空间的几何性质与力的作用有关，宇宙空间几何确实是非欧式的。

科学想象，作为科学与想象、可能与现实、抽象与形象的有机结合，使罗巴切夫斯基在非欧几何的研究中思想奔放，思路开阔，激发出许多跨越时代的珍贵思想，成为探索宇宙几何奥秘的设计师。纵横数学的历史，凡是富有创见的数学家，无一不是科学想象的高手；任何重大理论的提出，都曾得助于科学想象的力量。可以说，离开科学想象，就没有微积分的发现和非欧几何的创立，也就没有今日数学的蓬勃发展。这正如著名物理学家普朗克（M.K.Planck，1858—1947）在谈自己的科学创造体会时指出的："即使是严格的科学研究，没有想象力自由发挥，也不能前进"。[2]

我们在看到直觉思维具有创造性功能的同时，还应看到它有着不确定性的一面，因而不能单靠它来确立数学论断的正确性。事实上。即使是直觉力极高的数学大师，也不能单凭直觉思维作出可靠的结论。在数学的历史上，因单纯相信直觉思维而误入歧途的实例并不在少数。例如，自十七世纪下半叶牛顿、莱布尼茨建立微积分以来，在相当长的时期内，数学家们凭借直觉一直认为，连续函数必可微。可是，到了1860年，瑞士数学家塞莱里埃(C.Cellérer，1818—1889）却

---

1) А.П.Норден, Оь основаниях геометрии, ГТТИ, 1956, стр.59.

2) 普朗克：《唯理认识之途径》，商务印书馆，第100页。

给出一个连续但处处不可微的函数的例子

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n}\sin a^{n}x$$

其中a为正整数。1872年7月18日，魏尔斯特拉斯（K.Weierstrass, 1815—1897）在柏林科学院的一次讲演中，也给出一个处处不可微的连续函数的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^{n}\cos(a^{n}\pi x)$$

其中a是一个奇整数而b是一个小于1的正的常数，而且$ab>1+(\frac{3}{2}\pi)$。这个例子的提出使整个数学界为之一惊，原来在连续性和可微性关系上直觉竟把人们欺骗了二百多年！这就告诉我们，在数学研究中，既要重视那些突如其来的思想火花，珍惜那些超越时代发展水平的、富有想象力的美妙构思，又要以严谨的科学态度对待它们，并且要善于把直觉思维和逻辑思维有机结合起来，使它们在相互配合、相互作用中充分发挥各自的功能。

二、逆向思维

逆向思维是相对于惯常思维而言的另一种思维形式。所谓惯常思维，就是通常所说的习惯性思维。它的基本特征是，因循已有的思路去考虑和思索问题。这种思维形式反映了思维过程的连续性、渐进性和联结性是思维惯性的表现。逆向思维则是发散式思维的一种，它的基本特征是，从已有思路的反方向去考虑和思索问题。这种思维形式反映了思维过程的间断性、突变性和反联结性是对思维惯性的克服。惯常思维对

于数学研究是不可缺少的，没有它，就没有知识的稳步增长和理论体系的巩固和完善；同样，逆向思维也是不可忽视的，因为没有它，就难于摆脱已有数学观念、理论框架的束缚，许多具有突破性的重大数学概念、数学理论也就难以产生出来。具体说来，逆向思维在数学研究中的作用，主要表现在下面几个方面：

（1）有利于克服惯常思维的保守性，开拓新的数学领域。n维几何的产生就是其中典型的一例。我们知道，在十九世纪之前，人们拘于对物理空间的经验认识，普遍认为几何学的对象只能是一维的直线、二维的平面和三维的立体，任何高于三维的数学对象都被认为是荒谬的。英国数学家华利斯(J. Wallis 1616—1703)曾说："长、宽、厚占有了整个空间；连幻想也不能想象在这个三之外还有一个第四个局部的维数。"[1] 甚至在他的《代数》一书中把高维空间看成是"自然界里的怪物，它比希腊神话中狮头羊身蛇尾的或半人半马的妖怪还难以想象。"[2] 几何学对象不能超过三维的这种思维惯性十分顽固，以至到了1860年德国数学家库麦尔(E.E.Kummer, 1810—1893)还嘲弄、拒斥四维几何的思想。最先打破这种思维惯性的是达朗贝尔(J.L.R.D'Alembert, 1717—1783)、拉格朗日(J.L.Lagrange, 1736—1813)和格林(G.Green, 1793—1841)等人。达朗贝尔在著名的《百科全书》"维数"这一条目中首次提出把时间看成是第四个维数；拉格朗日则进一步在他的著作中把三个空间坐标和表示时间的第四个坐标置于同等地位，并且把力学看成是一种四维几何学；英国自学成才的物

1) M.克莱因：《古今数学思想》第4册，上海科学技术出版社，1981年，第102页。

2) 同上

理学家、数学家格林在他的关于位势理论的论文里，用n维语言描述了位势问题。在当时看来，使用四维以及高维语言研究数学问题是违背常规的，因而属于一种逆向思维。然而，正是这种逆向思维，把n维语言引进了数学，即把变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$看成一个点，把n个变量的方程看成是n维空间的一张曲面。这就开拓出了n维几何学的新领域。

再如，在十九世纪之前，数学家们按传统微积分观念，有切线的曲线才能计算长度，因为在计算长度公式

$$L=\int_a^b (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

中，$y=f(x)$至少需要导数存在。受这种惯常思维的支配，在很长一段时期内，数学家们只研究那些有切线的曲线和有切平面的曲面，把那种处处没有切线的曲线和处处没有切平面的曲面则弃置一旁。可是，法国数学家勒贝格(H. Lebesgue, 1875—1941)却不受这种传统思维方式的限制，他认真研究和处理了处处没有切线的曲线和处处没有切平面的曲面，大胆推广和改进了传统的黎曼积分，从中开拓出分析学的一个新领域——勒贝格积分，在微积分学发展史上作出了重大贡献。

(2)有利于纠正惯常思维所造成的错误认识，开辟数学新方向。集合论的创立过程，就是其中的一个例证。我们知道，集合论建立的关键，在于承认无限集合的存在以及它和它的子集可以建立起元素之间的一一对应关系。可是，对这个关键问题，惯常思维的结果长期以来一直是错误的。早在公元前四世纪，希腊学者亚里士多德(Aristoteles，公元前384—322)就曾考虑过整数集合{1，2，3，……}。他承认整数具有无穷多个，但不承认它们可以作为一个整体而存在。《几何原本》的著名注释者普罗克尔(Proclus, 412—485)在研究

圆的问题时接触,曾到两个无限集合元素之间的对应关系。他考虑用一根直径可把圆分成两部分,二根直径可分圆四部分,依此类推。由于直径有无穷多条,所以必有两倍那么多的半圆。普罗克尔实际上已经接触到了这样一个事实:由直径的数目组成的整数集合{1,2,3,…},可以和由半圆的数目组成的偶数集合{2,4,6,…}建立起元素之间的一一对应关系。但他受亚里士多德思想的影响,拒不接受无限集合概念,因此他把上述事实作为一种矛盾现象否弃掉了。到了中世纪,数学家和哲学家又发现不少类似的"矛盾"。例如,两个周长不等的同心圆,如图3.1所示,可通过半径使圆周上的点构成一一对应关系,即对大圆上的任意一点A,总有小圆上的一点A'与之相对应,反之亦然。伽利略还注意到:两个不等长线段AB和CD上的点,可用如图3.2所示的方法构成一一对应关

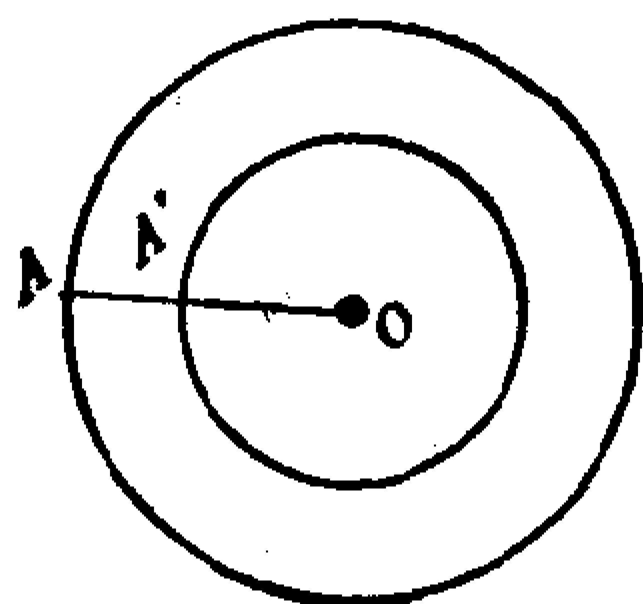


图 3.1

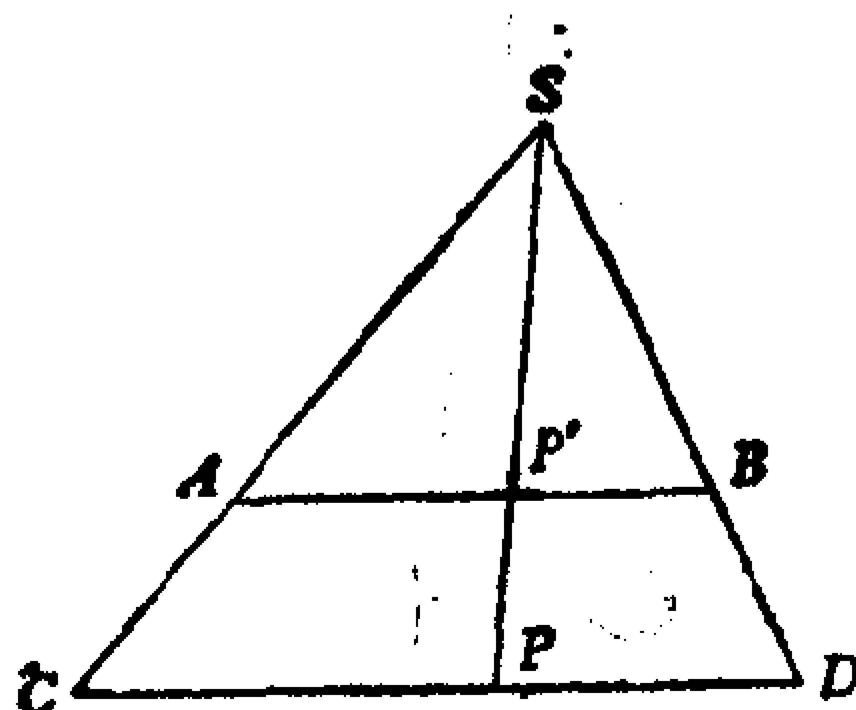


图 3.2

系:对较长线段CD上的任一点P,通过连接SP的线段,总能在较短线段AB上找到一点P'与之相对应。他还注意到:正整数1,2,3,…可以和它们的平方1,4,9,…构成一一对应关系。但由于受有限集合传统观念的束缚,伽利略同样抹煞了"整体可以和部分构成元素之间一一对应"的事实。甚至到了十九世纪中叶,大多数数学家对无限集合的认识还是错误的。他们囿于有限集合的观念,认为整体在任何情况下

都不可能与它的部分在数量上处于同等的地位。因为在他们看来，整体和部分构成一一对应这件事是不可能的。

历史上第一个打破有限集合观念的框架、敢于对无限集合进行逆向思维的是捷克数学家波尔查诺(B.Bolzano, 1781—1848)。他不仅承认无限集合的存在，而且把无限集合作为数学的对象来加以研究。他明确提出，无限集合的部分可以等价于整体，无限集合有其自身特殊的结构，这种结构与有限集合有着质的不同。波尔查诺的思想是革命性的，也是与传统数学观念背道而驰的。正是这种反传统的逆向思维，为后人研究无限集合开辟了新的方向，他本人也就由此成为集合论的先驱者。

沿着波尔查诺的逆向思维所开辟的新方向继续前进的是德国著名数学家康托尔(G.Cantor, 1845—1918)。他发展了波尔查诺的思想，提出一连串新的概念：极限点，导集，可列集，连续集等，并且用“基数”这一概念区分和描述了无穷集合的等级。康托尔正是由于彻底背叛了两千多年来人们在无限集合问题上的传统思维方式，把长期以来颠倒了的事实又重新颠倒了过来，所以才成功地开辟出数学的一个新领域——集合论。

(3)有利于排除惯常思维过程中出现的困难，开通新的思路。这里举两个数学史上著名的事例：一个是柯西(A.L. Cauchy, 1789—1857)建立常微分方程定性理论，另一个是希尔伯特解决“果尔丹问题”。

我们知道，早在十七世纪后半叶随着微积分理论的建立，常微分方程问题就产生了。对于各种各样的常微分方程，在十九世纪之前，数学家们普遍因袭解代数方程的思维方式，试图给出每个具体方程的确定解，并且坚信一定能够找到这样的解。可是，沿着这条传统思路走下去却变得愈来愈困难，因为

有许多方程很难找到它们的具体表达式，甚至有时是做不到的。就在绝大多数数学家陷入困境，一筹莫展时，柯西思路一转，探讨起这样一个问题：给定一个微分方程，它对于给定的初始条件和边界条件是否有解？这就把微分方程解的研究从定量转到了定性，即从实际解方程转到从理论上判断解的存在性。按照柯西的思路，对于一个微分方程来说，重要的是要知道它的定性性质，即要知道这一微分方程在给定的初始和边界条件下具有怎样的定性状态。一旦弄清楚了这种定性状态，也就从本质上把握了微分方程的基本特征，从而也就足以用来解决许多实际问题。柯西把微分方程的研究从定量转为定性，是数学思维方式上的一次重大突破。

果尔丹问题是代数不变量理论的一个著名问题。代数不变量是十九世纪从数论和射影几何研究中产生出的一个概念。所谓代数不变量，是指在线性变换下保持不变性质的那些量。代数不变量的研究开始于布尔(G.Boole, 1815—1864)、凯莱(A.Cayley,1821—1895)和萨蒙(G.Salmon, 1819—1904)等人的工作，这三个人曾誉有“不变量三位一体”的盛名。爱尔朗根大学教授果尔丹(P.Gordan,1837—1912)成功地解决了长期存在的一个重要问题：证明二次型存在一组有限基。由于他大半生致力于不变量理论的研究并取得突破性成果，而被数学界誉为“不变量之王”。为了纪念他，一个更一般的、仍未解决的重要问题，被命名为“果尔丹问题”。这个问题是：对已给数目的变量和次数的一个型，求其最小可能个数的有理整不变量与协变量，使得任何其它有理整不变量或协变量可以表示成这个完备集合的以数值为系数的有理整函数。果尔丹在解决二次型这个最简单情况时，使用的是算法工具，即通过运算把二次型的不变量和协变量的一个有限完备系具体地构造出来。这个方法虽然精巧，但却极为繁难。在

果尔丹问题上，数学家们大都遵循果尔丹的作法：以算法为证明的工具。然而，由于在多个变量和复杂变换群的情况下，这种方法已经失效了，结果使得后来的20多年内没能取得任何新的进展。果尔丹的思维方式使数学家们陷入困境。希尔伯特自1885年完成关于不变量问题的博士论文后，便开始直攻这个令人望而生畏的问题。他通过访问果尔丹本人和研读他的《不变量理论讲义》，全面了解了果尔丹问题的历史和现状。他想，既然果尔丹创立的方法已被大量事实证明不能奏效了，那么，要获得成功，唯一的办法是放弃果尔丹的算法工具，另选一条新途径。经过精心思索，他最后找到了一条完全不同于过去的途径：不去构造具体的有限完备系，而是从逻辑上去证明这样的有限完备系必定存在。沿着这条途径，他终于成功地解决了这个著名难题。在他的解法中，他既没有给出有限完备系本身，甚至连构造这个完备系的方法也没给出，只是证明了有限完备系的存在性。希尔伯特的这个思想方法新奇、独到，在数学界引起强烈反响。果尔丹本人更是感到意外，开始他惊奇地大声疾呼："这不是数学，这是神学。"[1]然而，经过冷静地思考之后立即向这位年轻人表示了敬意，并且承认如果按他的老路子走下去，无论如何是解决不了这个问题的。

从相反的方向进行思考，往往导致某种意想不到的后果。这正是逆向思维的重要功能之所在。然而，并非所有的逆向思维都是富有成果的。这是因为逆向思维本身具有很大的不确定性。它有时能够引导我们取得成功，但也有时会导致我们走向失败。因此，进行逆向思维，要采取科学而谨慎的态度，要具体问题具体分析，切不可简单行事，随意乱来，更不可

1） 康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年版，第42页。

把它作为“常规”方法来使用。否则，不仅不会给我们带来任何益处，反而会产生荒谬，延误我们的工作。

三、研究错误与失败

在数学探索的征途上，既有正确，又有错误；既有成功，又有失败。正确与成功是人们所期望的，也是数学研究的目的所在。然而，错误与正确、失败与成功又是不可分割的，错误往往是正确的先导，失败常常为成功铺平道路。英国著名物理学家、数学家威廉·汤姆逊(W.Thomson, 1824—1907)，曾这样总结自己的一生：“我坚持奋斗五十五年，致力于科学的发展。用一个字可以道出我最艰辛的工作特点，这个字就是失败。”[1] 错误与失败是科学研究中时常出现的一种现象。犯错误是难以避免的，问题是要尽快地识别和纠正；失败是经常发生的，问题是要善于从失败中及时地吸取教训。法国数学家阿达玛说，即使优秀的数学家也经常犯错误，不过他们能很快地发现并纠正。

1.错误与失败的基本类型

数学研究中出现的各种错误与失败，按其产生的原因可分成两大基本类型。

(1)错误预设下的永久性失败。

任何一项数学研究都是人们对问题有目标的追求，是在某种确定的预设下所进行的探索活动。这种预设通常包含在

1) W I.B.贝弗里奇：《科学研究的艺术》，科学出版社，1983年版，第148页。

所研究问题的条件和所探求的论断中。当给出的条件不充分或者假定的论断意义上不正确时，预设就是错误的。在这种预设下进行探索，必然要遭到挫折和失败，而且尝试多少次就失败多少次。例如，“几何三大难题”之所以难倒了古今中外所有尝试过它的人，其原因就是，在仅限定使用直尺作直线、圆规划圆弧的条件下，完成“化圆为方”、“三等分角”和“倍立方体”是不可能的。也就是说，问题的提法本身就是错误的。同样，用根式方法求解五次和五次以上的代数方程，从欧几里得的其它公理推演平行公理，都属于错误预设下的探索。

(2)正确预设下的暂时性失败。这类失败的原因，不在于预设本身有问题，而在于求解过程有错误，诸如思路上的混乱，计算中的失误，证明中的漏洞，作图上的偏差等。由于问题的条件充分、论断在意义上正确，因而失败和预设之间没有必然性联系，只要克服求解过程中出现的错误，失败是可以避免或挽回的。例如，拉格朗日和他的学生鲁菲尼(P.Ruffini, 1765—1822)在历史上是最先尝试证明“五次代数方程无根式解”的人。他们之所以没能取得成功，不在于论题本身有错误，而在于没能找到恰当的证明工具。当阿贝尔(N.H.Abel, 1802—1829)和伽罗华(E.Galois, 1811—1832)找到群论这一有力工具后，就从失败走上了成功。再如，哈密顿早在1828年左右就思索发明一种新数，用以描述绕空间一定轴转动并同时进行伸缩的向量的运动.他设想这种新的数应包含四个分量：两个来固定转动轴，一个来规定转动角度，第四个来规定向量的伸长和缩短。他的这一想法是正确的，但他在构造这种新数的过程中受传统数的观念的影响，不肯放弃乘法的交换性，因而导致了失败。经过长达15年的努力，当他使新数牺牲乘法交换律之后，他就走上了正确的道路，并最终赢得了成功——发明四元数。

2.研究错误与失败的方法论意义

错误与正确、失败与成功是可以相互转化的，但这种转化只有在一定条件下才能实现。所谓研究错误与失败，就是通过剖析已往的错误与失败，找出错误向正确、失败向成功转化的条件。因此，研究错误与失败不仅仅是个一般的认识论问题，而且有着重要的方法论意义。

(1)对错误预设所造成的永久性失败，可考虑"反其道而行之"，即从原问题的"反问题"着手，进行新的探索，以取得新预设下的成功。非欧几何的创立就是这样的典型。罗巴切夫斯基、亚·鲍耶和高斯之所以高于他们的前辈，成功地解决第五公设问题并从中发现非欧几何，其中一个重要的原因，就在于他们受以往错误与失败的启示，提出了原问题的"反问题"——第五公设证明不可能，并对这"反问题"进行了重新的探索。

(2)对正确预设下因思路错误而造成的暂时性失败，可考虑"另辟蹊径"，即放弃原来的思路，选择新的思路，沿着新的思路进行新的探索，以取得新思路下的成功。希尔伯特解决果尔丹问题，就是这样的典型。果尔丹及其追随者以算法为工具，企图具体地构造出不变量的完备系，结果接连遭到失败。希尔伯特却不然，他不拘传统，改换思路，采用"存在性"证明方法，因而最终取得成功。

(3)对正确预设、正确思路下出现的暂时性失败，可考虑"扫清障碍，继续前进"，即从解题细节上一步一步地查找和排除错误，直至最后取得成功。美国青年数学家阿佩尔(K.Appel)和黑肯(W.Haken)在1972—1976年间对"四色问题"进行机器证明，从多次失败到最后获得成功，就是属于这种性

质的探索。

3. 罗巴切夫斯基是怎样从失败走上成功之路的?

这里，我们简略剖析一下罗巴切夫斯基从失败走向成功的具体过程，从中可以看出，研究错误与失败在科学发现中往往有着特殊的作用。

罗巴切夫斯基是从1815—1816年着手研究平行线理论问题的。到1826年2月23日于喀山大学物理数学系学术会议上首次宣读自己的新几何学论文，前后经过了十年艰苦的努力。开始，他象其他所有研究者一样，也是沿着前人走过的失败道路出发的，试图给出第五公设的证明。从保存下来的他的学生听课笔记看出，他在1816—1817学年度的几何教学中，曾给出过自己的证明。

但是，罗巴切夫斯基不久就意识到，他的证明尝试遭到了失败。他在1822—1823学年度的教学笔记中写到："平行线问题是几何学中的另一个困难，这个困难至今还没有被战胜"，"到目前为止，战胜这个困难的全部努力都是徒劳的"。[1)]在1823年《几何学》讲义中，他更加明确指出，对于第五公设，"至今没能找到它的严格证明，已往给出的任何一种证明，只能是一种说明，而不配称作是真正意义下的数学证明。"[2)]这就告诉我们，在1823年之前，罗巴切夫斯基曾经对前人和自己的第五公设证明有过系统的考察和分析。

---

1) Л.Б.Модзапевский, Материалы ДЛЯ биографии Н.И.Лобачевского ИЗД.АН.СССР, 1948, стр205.

2) Три Сочинения По Геометрии Н.И.Лобачевского, ГТТИ. 1956, стр.57.

其实,早在罗巴切夫斯基之前,就已有不少人对以往的错误与失败作过考察,但他们仅仅从逻辑上进行推敲,找到逻辑破绽后,只是一笔勾销就算了事。因而,他们总是在放弃一种错误证明之后,又去着手进行另一种错误的证明,从一个死胡同退出来,又转身拐进另一个死胡同。亚·鲍耶的父亲法·鲍耶(F.Bolyai,1775—1856)就是其中的一个典型人物。法·鲍耶曾长期醉心于试证第五公设,几乎为之"埋没了人生的一切光亮、一切快乐",他虽然能及时识破自己和别人证明中的逻辑错误,但始终没能摆脱掉失败的厄运。再如,十八世纪德国的克吕格尔(G.S.Klügel,1739—1812),曾对历史上著名的三十多个证明作了仔细的审查,指出它们全都含有逻辑上的漏洞,并为此发表了一篇著名论文《简评证明平行线定理的几次重要尝试》。可是,克吕格尔同样采取了简单否定的消极态度,因而没能从中获得解决问题的任何启示。

罗巴切夫斯基与这些人截然不同,他没有停留在对错误与失败的表面认识上,没有局限于单纯从逻辑上对以往的证明进行审查,而是别开生面地从"所研究的对象"、"所采用的方法"等几个方面,对前人和自己的证明进行了细致的鉴别,以从中选择新的通往正确与成功之路。

通过对错误与失败的精心研究,罗巴切夫斯基发现,平行线理论的研究对象第五公设本身就是"不完备的","不是我们关于空间概念的必然结果"[1)]。他由此断定,正是这种不完备性,"使得几何学家们不得不直接或间接地引出一些辅助命题"[2)],犯了逻辑循环的错误。对于研究第五公设问题的方法

1) А.П.Норден об основаниях геометрии ГТТИ.1956.стр.59.

2) Три сочинения по геометрии Н.И.Лобачевского,ГТТИ,1965,стр.137.

和手段，罗巴切夫斯基察觉，以往数学家之所以一味从数学上追求第五公设的证明，是因为他们的思想存在片面性，自以为第五公设是一个可证明的定理，因而"把自己的思路局限了起来，以致所作出的全部努力都白费了"。[1] 罗巴切夫斯基就是这样，捕捉到了导致错误与失败的根本原因，并从中打开了一条新的思路，大胆提出了第五公设问题的"反问题"，即第五公设在数学上是不可证明的，用他自己的话说就是："我推断，不依赖于经验，去寻求这个真实性的证明是徒劳的"，因为"这个真实性还没有包含在我们对现实事物的概念自身中"。[2]

罗巴切夫斯基提出的这个"反问题"，有着重大的方法论意义，它是对第五公设问题传统研究方法的突破，也是开启非欧几何大门的钥匙。事实上，罗巴切夫斯基正是在解决这个"反问题"中发现非欧几何的。他曾在《新几何原理》这部著作中，暗示过自己这个不寻常思想的由来："众所周知，直到目前为止，几何学中的平行线理论还是不完备的。从欧几里得时代起，二千年来的徒劳努力，使我不得不怀疑，人们想要证明的这个真实情况是不能从概念本身中推得的，正如物理定律一样，它的真实性必须由诸如天文观测那样的实验来确证。最后，我肯定了我的猜测的正确性，而且认为最困难的问题完全解决了。我在1826年写出了关于这个问题的论证。"[3] 罗巴切夫斯基的这段自白分明告诉我们，他在1826年创立非欧几何之前，曾有过对第五公设不可证的猜测，而这个猜测正是由以往的错误与失败启示而来的。

---

1) Три сочинения по геометрии Н.И.Лобачевского, ГТТИ., 1956, стр.137.

2) А.П.Норден, Об основаниях геометрии ГТТИ, 1956, стр, 59.

3) А.П.Норден, Об основаниях геомерии ГТТИ, 1956, стр. 61—62

第四章 数学的简单性与复杂性*

简单性与复杂性是数学研究中经常遇到的一个矛盾。根据实际问题的需要，为了更快更好地解决这个矛盾，人们往往把复杂性问题转化为简单性问题。但是，有时却反过来，需要把简单性问题转化为复杂性问题。简单性与复杂性彼此转化，相互作用，是数学科学发展的一个重要杠杆。因此，正确认识数学的简单性与复杂性，深刻理解这两者的关系，对于搞好数学研究和教学工作，开展数学方法论的研究，都有十分重要的意义。

一、什么是数学的简单性与复杂性

所谓数学的简单性与复杂性，是相比较而言的，一般是指：①对证明问题来说，如果命题本身的已知条件涉及知识初级简单，且待证结论单一、浅显，那么我们就说它是简单性问题。反之，即为复杂性问题。而就证明方法、过程来看，如果证明的技巧性不强，步骤较少，所用的知识不多不深，我们就说它具有简单性，反之，就是具有复杂性。如果命题和证明过程都是简单的，那么整个问题当然具有简单性。②对计算问题来说，如果参加计算的数量少，每个数量的数字位数少，且所使用的计算工具简单，运算的步骤少、所需时间亦不多，那么就说它是具有简单性的计算问题。反之，就说它是具有复杂性的计算问题。在计算复杂性的问题中，在充分研究了哪

* 此部分是根据作者与徐本顺同志合作的论文改写而成的。

些问题能用计算机而哪些问题不能用计算机解决之后，很自然地就要提出可计算问题的相对难度的问题。这是计算复杂性理论的主要课题。什么是评价一个算法效率的标准呢？一般地把计算时间和空间选作复杂性度量的重要标准，另外，运行时间和硬件尺寸也是重要的复杂性度量。不过评价一个算法的效率，首要的因素仍是它的运行时间。③对数学的表达式来说，所含的符号较少，结构简单、醒目，直观性强，就可以认为是具有简单性的，反之，就是复杂性的。

简单性与复杂性不是绝对的，它是随着条件的变化而变化的。比如，1840年，德国的数学家麦比乌斯（A.F.Möbius，1790—1868）提出了"四色问题"，即在平面或球面上画地图，只需要四种颜色就可以使相邻区域不用同一颜色。1976年，美国数学家阿佩尔和黑肯看到这个问题的证明步骤和程序十分复杂，如果用人工去证明，一个人一辈子也完不成。[1]于是，就把程序编好，交给高速电子计算机去做，结果只花了一千二百个小时就证明出来了。又比如，一个实际应用问题，如果用算术四则运算方法去解决，可能相当繁难，但利用设未知数列方程的代数方法解决，就往往非常简单。再比如，阿基米德螺线的数学表达式，如果在极坐标系中，其形式很简单，但在直角坐标系中其形式就复杂了。

数学方法的简单性与复杂性，随着科学的发展其含义也在不断变化。在历史上已被判处死刑的一些刻板式的机械化的计算方法，当计算机问世后，却又死而复生，十分活跃。这些方法如果用手算起来无比复杂，甚至根本不可能，但在计算机上使用它，却极为简单。可是，随着现代科学技术的发展，精确度要求越来越高，考虑问题越来越广，对已有的数学方法，

1）有人计算：一个人每天按24小时工作量计算，用手工的方法，大约得花30万年的时间才能证明完"四色问题"。

就是用高速电子计算机也无济于事，于是就要求人们对计算方法不断进行研究与改进。在高中代数中解方程组的高斯消元法，用来解决现代化重要工程中的某些问题，即便使用巨型计算机，也是无能为力的。像设计核反应堆，为了达到高精度的要求，有时要解多至五万个未知数的方程组，对于这样极其复杂的问题，只有创造新的数学方法才能予以解决。为了衡量计算复杂性的问题，人们引入操作计数的概念。所谓操作计数，是指计算为了达到规定精度所要用的加法和乘法运算的次数。对于一个具有N个未知数的方程组问题，用高斯消元法其操作计数一般为$N^3/3$，用逐次超松弛法为$N^{\frac{2}{3}}$，用快速泊松法为$N\log_2 N$。对于充分大的N来说，$N^{\frac{2}{3}}$比$N^3/3$小得多，而$N\log_2 N$又比$N^{\frac{2}{3}}$小得多。今天，在各种算法中，确定哪种计算复杂性最低，已成为计算机科学理论中的一个中心课题。

二、解决简单性与复杂性矛盾的几个途径

数学的简单性与复杂性，表现形式是多种多样的，因而处理这一问题的方法也就绝不会是千篇一律的，但归纳起来主要有以下几个途径。

（1）数学的简单性与复杂性，通常表现为特殊与一般，故先特殊后一般。三角形与多边形相比，三角形简单，表现为特殊，而多边形复杂，表现为一般；一次方程与高次方程相比，一次方程简单，表现为特殊，高次方程复杂，表现为一般；一元函数与多元函数相比，一元函数简单，表现为特殊，而多元函数复杂，表现为一般；一重积分与多重积分相比，一重积分简单，表现为特殊，而多重积分复杂，表现为一般。当一个一般问题一时不能解决时，我们往往先考虑它们的特殊情况，然后

再推广到一般。这是因为一方面特殊问题常常较为简单，另一方面特殊问题的解决中往往孕育着一般问题的解法，共性孕育在个性之中。诸如，几何中的定值问题往往将轨迹处于特殊极端情况予以探路，将定值求出之后再进行一般性的证明。计算一个不规则复杂图形面积的问题，可以将它分解成几个特殊的规则图形面积的计算问题。在运筹学中，一个大型规划问题可以分解成为几个特殊的小型规划问题来解决。有些非线性规划求解问题可以转化为特殊的线性规划求解问题。高阶行列式的值可以通过递推的方法转化为特殊的低阶行列式计算出来，等等。

（2）数学的简单性与复杂性，有时表现为一般与特殊，故先一般后特殊。事实上，有一些数学问题的特殊情形不容易一下子看出眉目来，而它的一般形式却较易解决。比如，求扇形面积的计算公式，把几个扇形拼成一个圆形，通过圆形面积求其计算公式比直接去求扇形面积公式更容易些，还比如，给定一直线与一个正八面体的位置，求过已知直线并且二等分已知正八面体的体积的平面。我们可以把这一特殊问题推广到一般情形：给定一直线与一个具有对称中心的立体的位置，求过已知直线并二等分已知立体体积的平面。所求的平面当然经过立体的对称中心，所以这个平面应由这个对称中心与已知直线来确定。由于正八面体有对称中心，故我们原来所提出的特殊问题就迎刃而解了。

对于某些有关特殊数字和特定位置图形的数学问题，如果我们把特殊数字用一般字母代替，把图形的特定位置变成一般位置，就把问题普遍化了。对于这普遍化的问题，我们可以通过参数变化去发现解决问题的线索。对于某些问题来说，从变化中考虑问题可能更容易。于是，这种普遍问题解决之后，那种特殊问题也就随之而解决了　比如，有公共点O的

三直线不共面，过O作一平面与三直线成等角。如果我们考虑下面更一般的问题：有公共点O的三条直线不共面，P为其中一直线上一点，过P作一平面与三直线成等角。当P与O重合时，这个问题就变成上面的问题了。可见它是上面特殊问题的一般形式。假若P与O不重合，这个一般问题较易处理，即在另外两条直线上，选择Q和R两点，使得$OP=OQ=OR$，通过P、Q、R的平面可满足问题的条件。于是上面所提出的特殊问题也就容易解决了。又比如，求$C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\cdots\cdots+3^nC_n^n$之值，我们可先考虑它们的一般形式：

$$C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots\cdots+C_n^nx^n$$

而 $C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n$

故当$x=3$时，就得到上述问题的值为4^n。

还比如，计算积分：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}dx$$

我们可以先计算它的一般形式：

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}(P+x^2)^{-1}dx$$

该积分是要对参数P微分两次即可求得，然后用代换$x=yP^{-\frac{1}{2}}$，就可将B化为A。

有些数学问题如果一个一个去解决，根本不可能穷举完，只有从整体去考虑，才有可能把问题彻底解决。比如，一元n次方程的根的个数问题，如果按照一元一次方程有一个根，一元二次方程有两个根，这样一个一个去解决，永远也解决不完，只有把一元n次方程这个一般情况解决了，才能把它的根的个数问题彻底解决。

（3）数学的简单性与复杂性，个别情况下表现为特殊与一般交织在一起，故特殊与一般交错进行。比如，拓扑学中的彭加勒猜想，就是一例。拓扑学是研究图形结构的。在平面上。

一个圆和一个正方形可视作具有同样结构的图形，因为它们内部都连成一片（连通性），且图形各点彼此联系很紧密（紧致性）。在平面中的圆和圆环、空间中的球和环，虽然有连通性和紧致性，但它们的结构是不同的。法国数学家彭加勒猜想：在n维空间中的一个点集若是$n-1$连通的紧致流形，则必定是n维球。这一猜想，当$n=1$、2时，是早已知道的结果；当$n\geqslant 5$时，是1960年由美国数学家斯梅尔证明的；但当$n=3$、4时，至今尚未证明。这就是说，此问题先解决了$n=1$、2时的特殊情况，然后又解决了$n\geqslant 5$的较为一般的情况，最后再去解决$n=3$、4的特殊情况，这与通常情况相比，显得错综复杂。

三、化复杂性问题为简单性问题的若干方法

在数学研究过程中，我们总是力图把复杂性问题化为简单性问题，即遵循一个重要的方法论原则——简单性原则。著名物理学家爱因斯坦曾指出：“自然规律的简单性也是一种客观事实，而且正确的概念体系必须使这种简单性的主观方面和客观方面保持平衡。”[1] 作为现实世界量及其关系反映的数学，也必然具有其简单性。一些复杂的数学问题及其理论形式，实际上并非那样复杂，常常是暂时尚未找到它的简单形式罢了。因此，把复杂性的问题化为简单的形式，不仅在解决实际问题上是必要的，而且在理论表述上往往也是可能的。那么，把复杂性问题化为简单性问题，究竟有哪些方法呢？

（1）代换法。在数学中，1是最简单的了，然而为了解决某一数学问题或者简化某一数学式子，有时把1代换成它的复杂形式：$1=123^0$，$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，$1=99/99$，$1=1^3$

1）《爱因斯坦文集》第一卷，第214页。

$=1^{\frac{1}{15}}=1^{-87}$，$1=\log_a a$，

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}，$$等等。比如，计算 $1-\frac{7}{99}$，需要把 1 换成 $\frac{99}{99}$；分解 (x^3-1)，需要把式子中的 1 换成 1^3。把 1 换成了它的复杂形式，但整个数学问题却变成简单易解了。一个简单的数学表达式变换成它的复杂形式，或者一个复杂的数学表达式用它的简单形式来代替，这是解决数学问题过程中经常遇到的一种方法。

（2）变换法。在数学研究中，人们还常常运用变换法，把复杂性的问题转化为简单性的问题，并从而解决实际问题。比如，计算 $y=7^{\frac{5}{3}}$，如果把 7 自乘五次，再开 3 次方，计算相当麻烦。而将等式两端取对数：$\lg y=5/3\ \lg 7$，从对数表上查得 7 的对数，然后乘上 5/3，再查反对数表，即可得到 y 的值。在这个计算过程中，实际上经过了两次变换，一次是取对数，一次是查反对数表。又比如，我们要计算城门洞式的涵洞周围的应力，如果直接计算那是相当复杂和困难的，而借助于复变函数论中的保角变换把城门洞式的图形变换成圆形，在圆形上计算应力就简单和容易多了。实际上，"变换"是数学研究中的重要内容之一。在几何学中研究合同变换，射影变换，在线性代数中研究线性变换，在矩阵理论中研究相似变换，在拓扑学中研究拓扑变换，在积分学中研究积分变换等等。

（3）递推法。一个与自然数有关的数学问题，当某初始值解决之后，我们可以通过寻找递推关系来获得解决的方法。这种方法称之为递推方法。比如，要求回答："平面上有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，问这 n 条直线把平面分成多少个区域？"这是一个与自然数有关的问题。设平面被 n 条直线划分的区域为 P_n，易知 $P_1=2$，$P_2=4$，$P_3=$

7, $P_4=11$。我们先分析一下P_2与P_3之间的关系，当平面上有两条相交直线时，若再加上一条，根据题设，该直线必须与原有两条直线各有一个交点，原两直线把后加的一条直线分成三段，每一段把原来的四个区域中的三个区域一分为二，这样一来，区域就增加了三个，即$P_3=P_2+3$。一般地我们有

$$P_n=P_{n-1}+n \quad (n=2, 3, \cdots\cdots)$$

（4）分解法。解决一个大型的比较复杂的问题，有时我们可以把它分解为几个局部简单问题来解决。求多边形的面积，我们可以通过分解成几个三角形来计算。解一元高次方程，我们可以用分解因式法把高次方程变成几个一元一次方程或一元二次方程来求解。在某一整个区域上考虑的问题，可以分别考虑每个小区域上的问题，代数中的分段讨论法就是这种方法。

上述这些方法都是把复杂性问题化为简单性问题的方法。强调简单性的重要，但绝不能片面地夸大它的作用，而忽视复杂性和整体性，否则就会犯简单化的错误。

四、化复杂性问题为简单性问题的重要意义

把复杂性问题化为简单性问题，在数学发展中有着极其重要的意义。

1．创造新的数学方法，扩展新的数学理论

1614年，耐普尔(J.Napier,1550—1617)为了简化复杂的数字计算，发明了对数，实现了计算方法上的一次变革。1840年，乃毛司向著名几何学家史坦纳提出要求用纯几何方法证明："任一三角形，若有两条内角平分线相等，则为等腰三角

形”。史坦纳给出一个证明。但由于证明过于复杂，很多人都企图寻找一个比较简单的证法。于是就形成了历史上有名的证明史坦纳-乃毛司定理的热潮。在十九世纪四十年代里，很多杂志都刊载了关于这个问题证明的论文。甚至直到今天也有这方面的论文发表。在这一化简证明的过程中，大大地丰富了数学的内容。1983 年，我国数学工作者给出了一个迄今为止最简单的证法-合同变换法。由于这个简单证明使人们看清了在证明过程中所用的方法只与第三个角的平分线有关，于是把这个定理推广为：“设 O 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 的平分线 l 上任意一点，连结 AO 和 CO 并延长使之分别交 BC、AB 于点 D 和 E，若线段 AD 和 CE 是同型的，且有 $AD=CE$，则 $\triangle ABC$ 必为等腰三角形”（见图4.1）。显然，当 O 为三角形 ABC 的内心时，就是史坦纳-乃毛司定理。

像史坦纳-乃毛司定理简化证明这样的事例在数学史上是很多的。比如，果尔丹在代数几何中证明了“每个二元型 $f(x_1, x_2)$ 都具有一个以有理整不变量与协变量所组成的有限完备系”这一定理。他的证明冗长、繁难。后来希尔伯特给这一定理以简单的证明，接着他又以完全新的途径，证明了这一定理，并且使这个定理推广到更一般的形式：“对于任何一个型或一组型，都存在有限多个有理整不变量和协变量，使得每个其它的有理整不变量与协变量都可以表达成这有限集合中不变量或协变量的线性组合。不变量与协变量的这个有限集合是不变量的完备系”。希尔伯特的证明比果尔丹的证明简单得多。正因为如此，才使他的方法进一步应用到近世抽象代数中去，并从

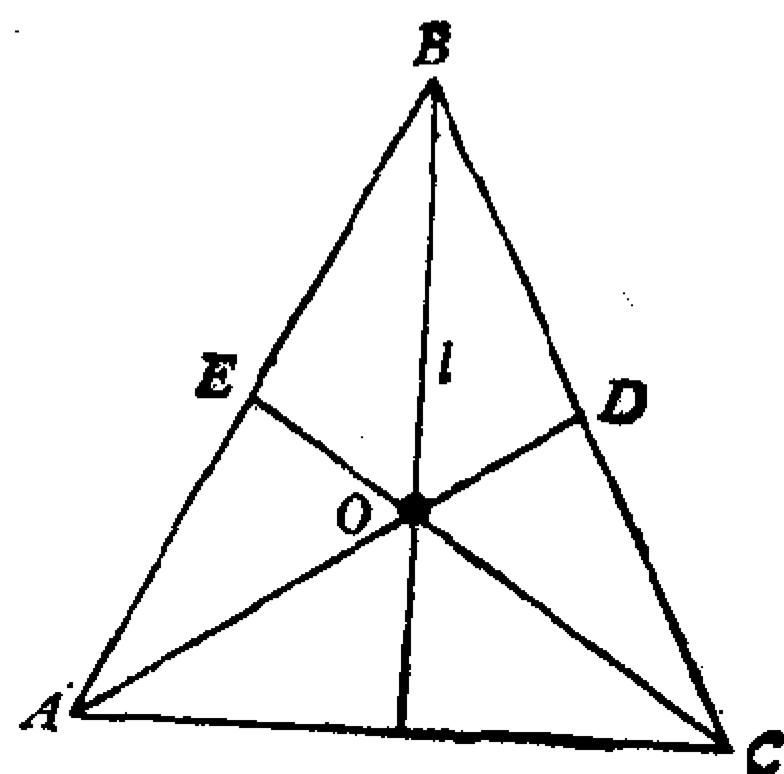


图4.1

而把群、环和域的抽象理论提到显著的地位。

2．有利于数学的继承和发展

随着人类社会的发展，数学知识越来越丰富，体系越来越庞杂。在这浩繁的数学海洋中，人们只有把现有的数学知识和理论体系，采取简明而科学的符号，运用筛选、提炼以及逻辑方法等，将其形成更为简单、严谨的科学系统，才能使后代更好地继承和发展。1976年，英国著名数学家阿蒂亚在他就任伦敦数学会主席时，发表了题为《数学的统一性》的演讲。在这次演讲中，他十分强调数学简单性的重要性。他说："数学的统一性及简单性都是极为重要的，因为数学的目的，就是用简单而基本的词汇去尽可能多地解释世界。归根结底，数学仍然是人类的活动而不是计算机的程序。如果我们积累起来的经验要一代一代传下去的话，我们就必须不断地努力把它们加以简化和统一。"[1] 事实上，采用数学符号代替文字叙述，既简明又确切，曾极大地推动了数学的发展。我国古代数学走在世界的最前列，而后来又远远地落后了其原因之一就是没有及时地采用先进的数学符号，长时期停留在文字叙述上。英国的牛顿和德国的莱布尼茨，几乎同时完成了微积分的创立工作，但由于莱布尼茨的微积分符号要比牛顿的简明而科学，加之英国拒绝采用莱布尼茨的这些符号，因此阻碍了微积分在英国迅速发展。

为了把复杂性的问题化为简单性的问题，人们往往从许多新的角度来考虑问题，而从新的角度考虑问题就常常导致新思想方法的创生。正如爱因斯坦所说：从新的角度去看旧的问题，都需要有创造性的想象力。这不仅有利于继承而且有利于发展。事实上，数学研究中寻求一题多解，一题多证，都有

1） 阿蒂亚：《数学的统一性》，《数学译林》，1980年第1期。

利于提高人们的数学创造能力。

应当指出的是，不仅把复杂性的问题化成简单的形式有利于数学的发展，而且把简单性的问题化成复杂的形式有时也能获得新成果。比如，设K是R^n中的紧致凸体，g是K的重心，过g任作K的一条弦$C(g)$，并以$C'(g)$记平行于$C(g)$的任一条弦，$|C(g)|$和$|C'(g)|$分别表示$C(g)$与$C'(g)$的长，令

$$F^g(K)=\min\left\{\frac{|C(g)|}{|C'(g)|}:g\in C(g),C(g)\parallel C'(g)\right\}$$

1963年，Grünbaum曾证明了在R^2中$F^g(K)$的下确界是$\frac{2}{3}$；在R^3中，他猜想$F^g(K)$的下确界是$\frac{1}{2}$。1974年，洪加威将$\frac{1}{2}$换成了它的复杂形式$\frac{2}{4}$，结果有：

$$R^2:\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1};\qquad R^3:\frac{2}{4}=\frac{2}{3+1}$$

一般地猜想有：$R^n:\frac{2}{n-1}$。洪加威证明了这个猜想是对的，从而得到

$$\inf_{K\subset R^n}F^g(K)=\frac{2}{n+1}$$

不仅如此，为了解决某些实际问题，有时还采取由简单到复杂，再由复杂到简单，简单与复杂相互交替进行。像电子计算机这样一类庞大的复合系统，就是由大量的简单元件构成的。在这样一个大型复杂系统中，每一个元件都有它的作用，去掉任何一个元件都有可能使系统失灵，但对系统作全面的重新安排，用新的设计方法，也有可能以更少的元件构成一个正常工作的系统。研究这种减少元件的可能性问题，便产生了一门新的数学学科——复杂性理论。复杂性理论就是要寻求在这些复合系统中所需要元件数量的最小值。为此，需要

从两个方面研究：一是寻找一种新的需要最少元件的设计方法，一是证明不管采用什么样的设计方法，要完成某一特定任务所必需的元件数量。人们为了获得具有高功能的电子计算机，一方面要把一些简单元件组合成一个比较复杂的复合系统，从而实现由简单到复杂的过程；另一方面还要研究在完成某一特定任务前提下，使这一复合系统越简单越好，因此，又必须完成由复杂到简单的过程。正是在这两个过程的反复交替中，电子计算机逐步实现更新换代，数学理论不断得到丰富和发展。

第五章　数学潜在思想的产生及其形态特征

数学是在历史上逐渐形成和发展起来的一种知识系统。它的每一个概念、命题、理论和方法，在确立之前，都有一个萌发、孕育的过程，有一个或长或短的由"潜"到"显"的过渡阶段。我们把尚处于萌发、孕育阶段的数学思想，称为数学潜在思想。总结和分析历史上数学潜在思想产生的方式及其形态特征，对于全面理解数学思想方法演变的规律，有着重要的意义。这里，结合剖析某些分支学科在历史上的系统发育过程，对数学理论的几种基本潜在形态作以简略分析。

一、数学潜在思想产生于直观形象，表现为"经验形态"

社会实践是人类认识的总源泉，当然也是数学潜在思想生长之土壤。人们从事实践活动时，接触到大量的事物，这些事物的直观形象为人们认识现实世界中的空间形式和数量关系，提供各种原型和类比物。因此，事物的直观形象往往成为数学思想萌发、孕育的生长点。源于直观形象的数学潜在思想，通常是以"经验形态"出现的，并逐渐演变成数学理论。

"经验形态"的数学潜在思想，大都具有下面两个基本特征：

第一，明显的直观性和实验性，缺乏抽象性和严密性；

第二，零散、片断，彼此之间缺乏逻辑上的必然联系。

这种形态的数学潜在思想，其演变的规律是：不断积累新的事实，逐步脱离其具体内容而向抽象方面发展，并渐渐确立起事实之间的逻辑联系，最后形成一个有系统的、抽象的体系并由此转变成数学理论。这里，我们以射影几何为例加以说明。

射影几何，作为一门独立的数学学科，是在十七世纪大体上确立起来的。然而，它的基本原理的思想萌芽，却至少可追溯到文艺复兴时期某些艺术家们的工作。我们知道，中世纪的黑暗过去后，欧洲出现了前所未见的艺术繁荣。这个时期的艺术家们大都是多才多艺、学识渊博的学者。他们的兴趣极为广泛，工作范围涉及到许多领域，诸如绘画、雕刻、设计器械和桥梁等。而这些工作又都与数学特别是几何学有关，这就使他们有机会去研究某些数学问题。

绘画实践向画家们提出的一个重要问题是，如何把三维的现实世界绘制到二维的画布上？这个问题把画家们引向透视法的研究。最先在这方面取得成果的是意大利著名画家、数学家阿尔伯特(L.B.Alberti，1404 — 1472)。他凭借多年的绘画经验，受观察景物时视线、景物和画面关系的启示，提出这样一个原理：要把一个景物描绘在一块布幕上，可设想

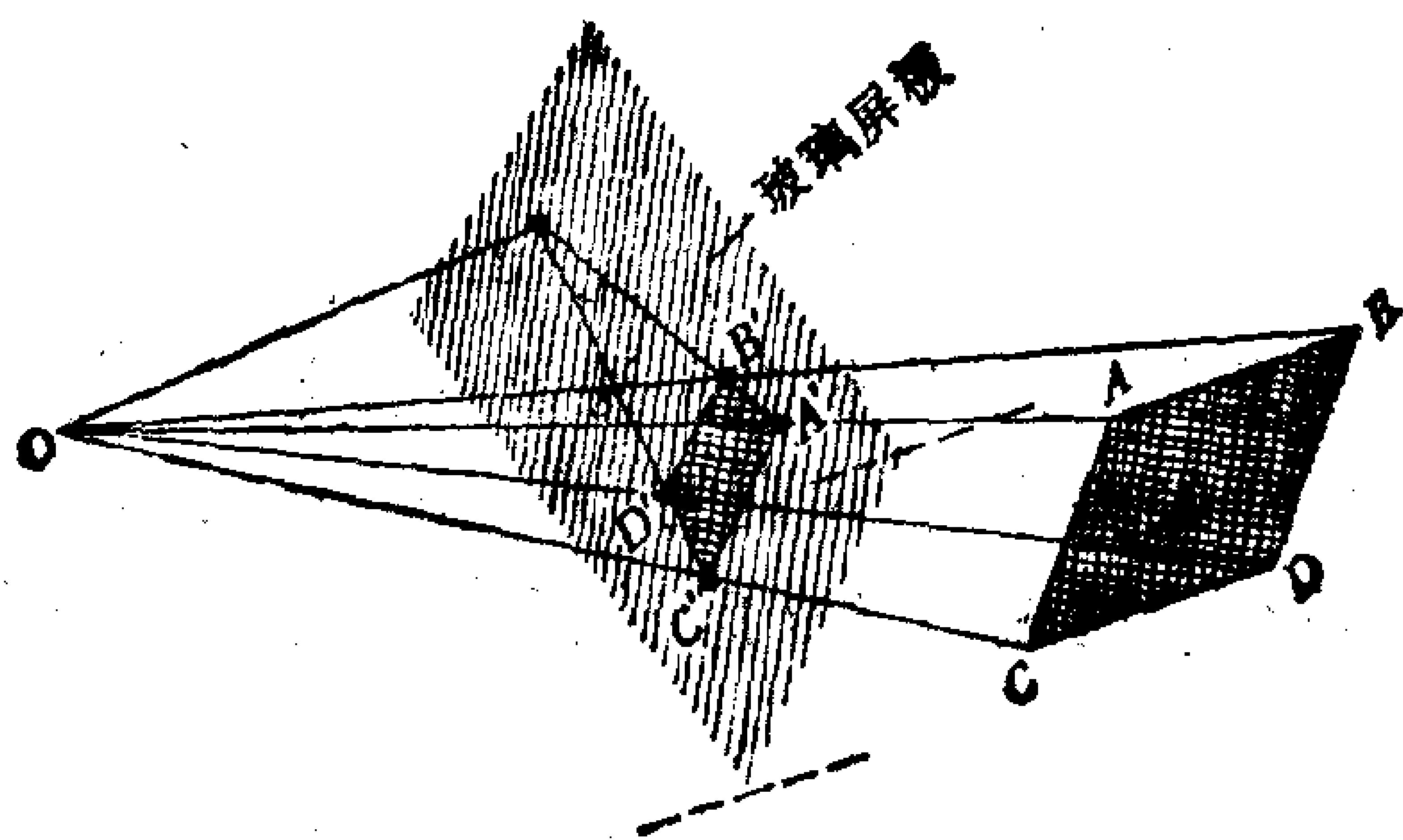


图 5.1

把眼睛作为投影中心，在眼睛和景物之间插进一块直立的玻璃屏板，如图 5.1 所示，再设想投影线从眼睛发出，射到景物的每一点上，那么这些射线穿过玻璃屏板(画面)之处就会相应标出一个一个的点，这个点集就是原景物的一个截景，它虽然不同于原景物，却能逼真地反映原景物的某些基本特征。他还提出，如果设想在眼睛和景物之间插进两块玻璃屏板，则在它们上面得到的两个截景将是不同的。他进而又提出，如果设想眼睛从两个不同的位置看同一景物，而在每一种情况都插一块玻璃屏板直立在眼睛和景物之间，如图 5.2 所示，

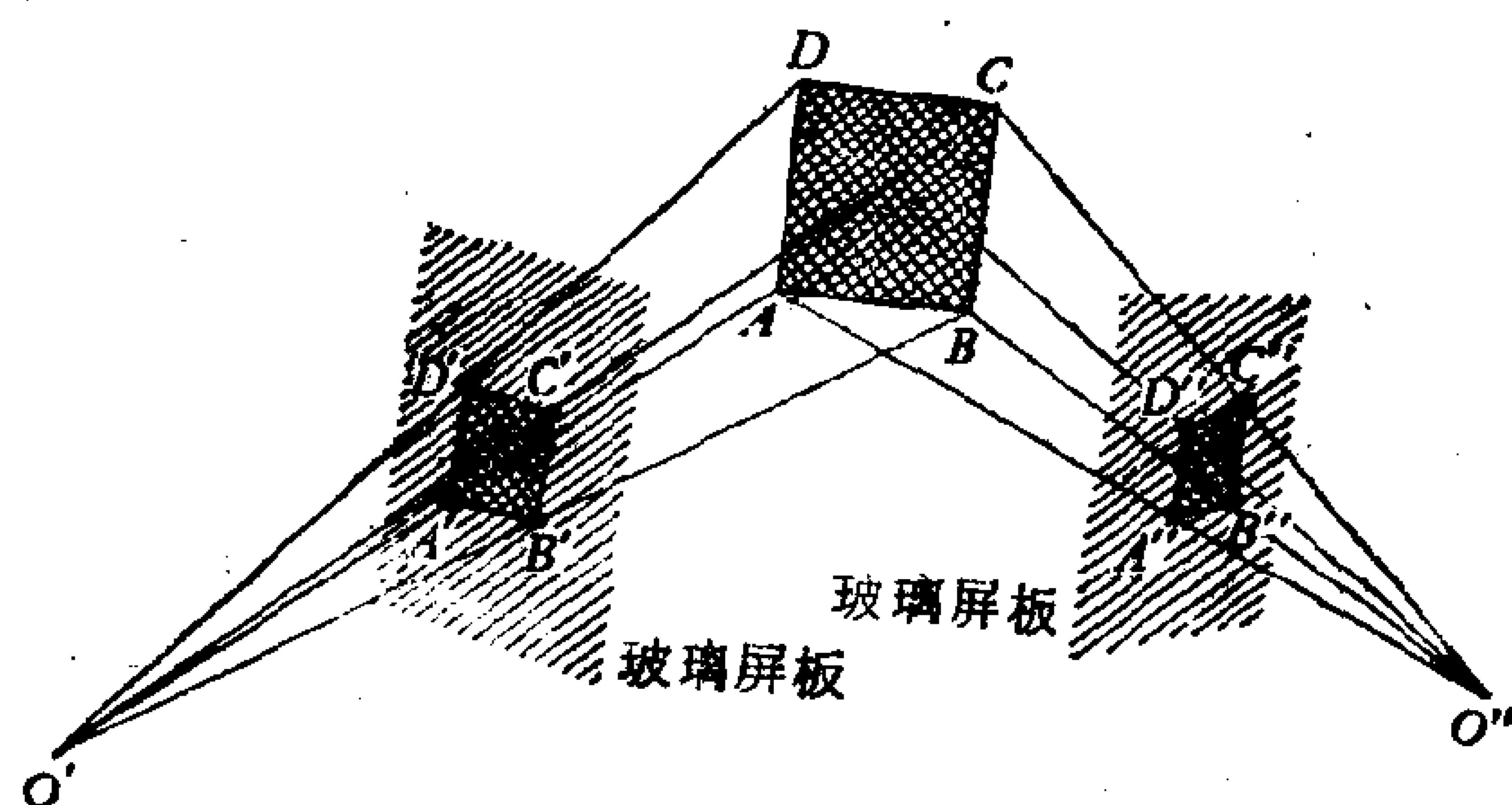


图 5.2

那么所得到的两个截景也将是不同的。他认为，由于这些截景都来自同一个原景物，所以它们必有某种共性。由此，他提出一个数学问题：来自同一景物的任意两个截景之间在几何上有什么样的关系？这个问题实质上是射影几何建立的基本出发点。阿尔伯特在 1435 年发表的《论绘画》和 1450 年发表的《数学游戏》中谈到了自己上述的研究成果，并且从数学上给出了某些基本法则。这些法则讲得很具体，很形象，由于多半出自绘画经验的体会，因而显得比较零散，叙述上也比较含混，更缺乏严格的证明。

著名画家达·芬奇(L.D.Vinci, 1452—1519)、弗朗凯

哈（P.D. Francesca，约1410—1492）和丢勒（A. Dürer，1471—1528），也都在自己的著作中提出不少有关透视法方面的知识。他们谈到的大都是实际知识，很少有理论上的分析，而某些原理和法则又通常是以格言的形式确立下来的，因此也就谈不上有什么逻辑严谨性。

射影几何的知识，由经验形态向理论形态的转变，是在十七世纪初步完成的。其中作出重要贡献的是法国两位数学家笛沙格（G. Desargues，1591—1661）和帕斯卡。笛沙格首先把前人的经验法则和零散原理汇编成册，然后深入考虑了它们之间的内在联系，并引进一些必要的概念和命题。例如，他引进了无穷远点、对合、调和点组等重要概念；明确叙述了射影几何的一个基本性质：交比在投影下具有不变性；提出了后来以他的名字命名的定理，即著名的“笛沙格定理”：如果两个三角形对应顶点连线共点，那么对应边的交点共线，反之也成立。这是射影几何的一个基本定理。1636年，他出版了几本关于透视法的小册子。1639年他出版了《试论圆锥和平面的相交所得结果的初稿》。

帕斯卡在朋友笛沙格的影响下，对投影和截面取景原理作了精心研究。他对射影几何预告了许多重大结果，作了许多高明的猜测，发现许多推理和运算的捷径。这些结果和猜测，后来被证明全是正确的。1639年，当他16岁时就用投影法写了一篇有关圆锥曲线的著作，遗憾的是后来失传了。17岁时，他发表一篇长约八页的《略论圆锥曲线》，然而后来也长期失传，直到1779年才被重新发现。帕斯卡提出并证明了射影几何的一条重要定理：内接于一圆锥曲线的六边形的三双对边的交点共线。这就是著名的“帕斯卡六边形定理”。

笛沙格和帕斯卡等人研究了点和直线的相交问题，这类问题着重图形的位置和相交方面的性质，而不是长度、面积和

角度等度量方面的性质。也就是说，在笛沙格和帕斯卡等人的著作中，已经出现射影几何所特有的思想方法：研究图形在射影变换下保持不变的那些性质。因此，笛沙格和帕斯卡等人的工作，标志着射影几何从“经验形态”向“理论形态”的转变已初步完成。但是，正当射影几何向完善自己的体系方面发展的时候，却被解析几何、微积分的兴起和蓬勃发展所淹没。直到十九世纪初随着综合几何的复兴才得到充分的发展。

二、数学潜在思想产生于特殊方法，表现为“个例形态”

在数学中，存在着这样一类学科：它们以解决某些问题的特殊方法为其原初的生长点，而它们的潜在思想又是表现为具有明显特殊性的“个例形态”，并通过这种形态逐渐演变成数学的理论。

一般说来，“个例形态”的数学潜在思想，通常具有下面两个基本特征：

第一，所运用的方法大都比较繁难，需要较高的技巧和机敏；

第二，所适用的范围大都比较狭窄，缺乏功能的普适性。

这类形态的数学潜在思想，其演变的一般进程大体上是：不断改进方法本身的结构，使之变得越加简明，应用范围越来越大，以至最后形成一个具有一般方法功能的理论体系。

微积分就是以这种形态为其前身酝酿起来的。我们知道，微积分是一门以变量为研究对象的理论，也是一种以无限小分析为核心的方法。积分法和微分法就是体现这种方法的两个不同的方面。微积分创立于十七世纪下半叶，但它的潜

在思想早就存在了。

积分法的前身可追溯到两千多年前的"穷竭法"。这种方法是在尝试用多边形逼近圆面积的思想启示下，由希腊学者欧道克斯(Eudoxus，约前 408 — 355)于公元前四世纪建立的。穷竭法在数学中曾起过重要的作用，是解决某些求积问题的一种有效方法，特别是能够求出某些特殊的曲边形面积和曲面体体积。例如，阿基米德曾用它成功地解决了抛物线弓形的面积以及回转锥线体的体积。穷竭法的缺点主要是方法本身缺乏一般性，通常是有多少个问题就要设计出多少种具体的解题方案，而且往往需要相当高的机敏和技巧。因此，它只适用于某些特殊问题。可是，它却潜在着新的思想，因为就在这缺乏普适性的"个例形态"中，孕育着无限小分析的原理。这就使穷竭法成为今日积分学求和法的早期雏型。事实上，后来的许多数学家正是在不断改进穷竭法的基础上，建立起一种具有一般模式，能够解决大量同类问题的共同方法——积分法的。

微分法的前身最初明显地出现在十七世纪上半叶。它赖以萌发、孕育的原初生长点，是曲线的切线问题。在微分法的孕育时期，作出重要贡献的是笛卡儿、费尔马和巴罗(I.Barrow，1630—1677)等人。笛卡儿在他的《书信集》中提出，可把切线看成是曲线的极限位置，费尔马在 1637 年的手稿《求最大值和最小值的方法》中给出了求曲线的切线的方法。这个方法使用了无限小量，已十分接近微积分中求曲线切线标准的方法。巴罗方法的特点是运用了微分三角形，离牛顿的微分法几乎只差一步。笛卡儿、费尔马和巴罗等人，虽然在自己的工作中孕育了微分法的思想，但他们却没能再向前迈一步，没能从"个例形态"中发现具有普遍性意义的东西。从而也就没能给出微分法的普遍法则。

微积分的发明大体上是由牛顿和莱布尼茨完成的。他们的最大功绩在于能敏锐地从孕育微积分的各种“个例形态”中，洞察和清理出潜藏着共性的东西——无限小分析，并把它提升和确立为数学理论。法国数学家卡诺（L. N. Carnot, 1753－1823）说过：“人们很久以来就接触到这个伟大的发现了，如果想到其中有一个伟大的发现要完成的话，杰出的几何学家——尤其是笛卡儿、帕斯卡、费尔马、惠更斯、巴罗、罗伯维尔（D. Roberval, 1602－1675）、华利斯、牛顿——没有任何一个人做不出这个发现的。”[1] 牛顿和莱布尼茨之所以高于前人，完成微积分的创立工作，其重要原因在于他们能够从前人的大量工作中，想到了有一个伟大的发现就要完成。

在数学中，象微积分这种通过“个例形态”孕育诞生出来的分支学科是比较多的。诸如常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论以及差分学等，都是以“个例形态”为其前身，通过由“特殊”上升到“一般”的途径，逐渐演变发展成数学理论的。

三、数学潜在思想产生于学科渗透，表现为“综合形态”

在数学中，学科之间的相互渗透，往往成为新学科孕育的重要生长点。所谓学科渗透，是指将一个学科领域中的原理或方法，应用或移植到另一个学科领域里去，从而作出新的发现或形成一门新的学科。通过学科渗透而形成的新学科，在其正式问世之前，通常是以“综合形态”存在的。综合形态的基本特征是，保持渗透学科双方的某些属性，特别是双方的某些优点。以综合形态存在的数学潜在思想，其演变规律是，在

1)《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981年，第147页。

母体学科中不断扩大其存在范围，并逐渐形成一个独立的体系，以致最后脱离开母体学科而转变为一门新的学科。

解析几何就是历史上第一个通过学科渗透而产生出来的数学分支学科。我们知道，解析几何是代数的思想方法向几何学渗透的结果。它的基本思想是，用代数方法研究几何问题，具体地说就是，通过直角坐标系建立起平面上的点和实数对的一一对应关系，从而能够借助方程研究曲线的性质。因此，解析几何通常也称为坐标几何。解析几何是十七世纪由法国的笛卡儿和费尔马创立起来的，它的思想萌芽要追溯到两千多年前。早在公元前二世纪，希腊学者阿波罗尼在研究圆锥曲线的时候，就曾引用两条正交曲线，借助这两条直线线阐述了圆锥曲线的某些性质。这已是坐标思想的萌芽。公元前二世纪，依巴谷(Hipparchus，公元前180－125)在解决天文、地理中的几何问题时曾明确指出，地面上一点的位置可由两个坐标来确定。十四世纪英国的奥力森(N．Oresme，约1323——1382)在他的著作中也曾陈述过一种确立点位置的坐标。在这些人的工作中，代数思想方法向几何学的渗透已有所体现，但渗透的范围还是相当有限的，而且渗透的方式缺乏明晰性。因此，这些人的工作只能起到酝酿坐标思想的作用。

笛卡儿和费尔马受前人工作的启示，明确建立起直角坐标系，并借助坐标系自觉地运用代数方法去解决几何问题，从而使代数的思想方法能够全面地渗透到几何学，这就开拓出数学的一个新领域——解析几何学。在笛卡儿和费尔马那里，解析几何还明显地带有问世前的某些不成熟痕迹，例如只有横坐标轴，没有纵坐标轴，并且坐标轴只有正向而没有负向，等等。笛卡儿在他的著作中，把这种新几何称为代数几何。术语"解析几何"，是后人在一百多年后提出的。

自解析几何产生之后，发端于学科渗透的数学分支学科

相继涌现出来。例如，把微积分的思想方法应用于几何学，研究曲线、曲面逐点变化的性质，导致了微分几何的建立；把微积分的思想方法移植到射影几何，导致射影微分几何的形成；格论与射影几何相结合，产生出连续几何；概率论与微分方程相结合，产生出随机微分方程论。再如，解析数论、几何数论、代数几何、计算几何等学科，也都是通过学科渗透建立起来的。

通过学科渗透，不仅能够在数学内部建立起新的分支学科，而且还能在数学和自然科学、社会科学之间建立起新的边缘学科。如计算物理学、计算化学、生物数学、经济数学、气象数学、数理逻辑、数理语言学、生化数学、生物力学数学、生物概率论、数量遗传学、数量分类学以及数量进化论等。

现代数学发展的一个重要趋势是，既高度分化又高度综合。分化与综合的深刻一致性，使得新的边缘学科不断出现。因此，通过学科渗透产生新的分支学科，是现代数学繁衍的一个重要方式。

四、数学潜在思想产生于反常命题，表现为“怪论形态”

在数学中，还有这样一类分支学科，它们的萌发点是某些具有反常性的命题，即这些命题或者与已有的数学原理相矛盾，或者与已有的数学观念相背离。它们诞生前的潜在的思想，又往往表现为令人难以置信的“怪论形态”。它们的演变规律是，逐渐形成逻辑严谨的体系，并不断揭示这个体系的逻辑无矛盾性和应用的可能性。

非欧几何就是发端于反常命题，并以“怪论形态”孕育和

发展起来的数学分支学科。非欧几何创立于十九世纪二十年代。它的某些命题早在十八世纪就出现在意大利的萨开里(G. Saccheri, 1667—1733)和瑞士的兰伯特(J. H. Lambert, 1728—1777)的研究成果之中了。萨开里在用反证法试证第五公设时，曾逻辑地推演出四十多个不合"情理"的反常命题，它们不仅与欧氏几何的原理相冲突，而且也与人们的日常经验相悖谬。这些命题实质上是属于非欧几何的，因此它们的出现意味着非欧几何的潜在思想已经形成。可惜的是，由于萨开里囿于传统几何和空间观念，竟把它们当作逻辑矛盾排除掉了。继萨开里之后，兰伯特在用反证法试证第五公设时，再次推演出许多属于非欧几何的命题，并且比萨开里得到的还多。兰伯特没有象萨开里那样武断地否弃掉这些奇异的命题，因为他意识到，这些命题之间并不存在任何逻辑上的矛盾。他进而还猜测这些命题可能属于一种逻辑上可能的几何，但他不敢设想这种新几何的现实合理性，以至后来把它们当作一种"怪论"搁置在一旁了。

到了十九世纪初，非欧几何的潜在思想在须外卡尔特和塔乌里努斯手中得到了进一步的发展。他俩不仅得到许多属于非欧几何的命题，而且还区分了两类不同的几何：欧几里得几何与星空几何，在后一种几何中三角形的内角和小于二直角。他俩本来已经踏进了非欧几何的领域，可是由于受本人数学素养的局限，再加上得不到名人的指导和支持，最后不得不半途而废，放弃对新几何理论的进一步探讨。

上述事实表明，在高斯、亚·鲍耶和罗巴切夫斯基创立非欧几何之前，非欧几何的潜在思想在萨开里、兰伯特、须外卡尔特和塔乌里努斯等人的工作中已经酝酿了一百多年。美国著名现代数学史家 M. 克莱因(M.Kline)在总结这一段历史时指出："任何较大的数学分支或较大的特殊成果，都不会只

是个人的工作。充其量，某些决定性步骤或证明可以归功于个人。这种数学积累的发展特别适用于非欧几何。”[1]萨开里、兰伯特等人，虽然没能成为非欧几何的创立者，但他们对新几何思想的孕育却是有重大功绩的。高斯、亚·鲍耶和罗巴切夫斯基在非欧几何发现上的最大贡献，也正是完成了新几何由“潜”向“显”转变的决定性步骤。

无穷集合论和勒贝格积分基本上也是以“怪论形态”完成历史上的系统发育的。无穷集合论的最初萌发点是，“整体和它的部分可以构成元素之间的一一对应关系”这一反常命题：勒贝格积分的最初萌发点是“没有切线的曲线和没有切平面的曲面”这一反常命题。它们在孕育过程中都曾因表现为“怪论形态”而长期遭到学术界的排斥和否弃。这就表明，以“怪论形态”存在的数学潜在思想，由于其自身固有的“反常性”，而使得它们往往要在挫折和逆境中，通过艰难曲折的道路，完成由“潜”向“显”的过渡。

1) M. 克莱因：《古今数学思想》第三册，上海科学技术出版社 1980 年版，第 285 页。

第六章　数学问题

数学问题是数学中的一种疑难和矛盾，它的提出和解决是推动数学发展的重要力量。当代著名科学方法论学者波普尔(K. R. Popper，1902—)认为："正是问题激发我们去学习，去发展知识，去实践，去观察。"[1]数学家们无一不懂得问题在整个数学发展以及个人创造活动中的地位和作用，他们都惯于以巨大的热情去致力解决那些重大而关键的问题。现代数学中的巨人希尔伯特以其亲身的体会强调指出："正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界。"[2]

这里，我们重点讨论数学问题的几种基本类型，每类问题在数学发展中的作用，以及数学问题的主要来源等。

一、常规问题

在数学中，我们会遇到各种各样的问题：计算问题，证明问题，作图问题，……。这些问题虽然表现形式不一，所述内容各有所异，但有一个共同的特点，都是在一定的知识背景中提出的。知识背景主要包括已有的概念、理论和方法等。我们依照问题的解答与知识背景的关系，可以把数学中的问题大

1）转引自周昌忠：《科学研究的方法》，福建人民出版社，1983 年版，第81页。
2）希尔伯特：数学问题，载《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981 年版，第 61 页。

体上分成两类：一类是常规问题，另一类是反常规问题。

所谓常规问题，是指那些在已有理论框架内便可得以解决的问题，也就是说，为解答它们，无须打破已有理论的框架，无须创造新的工具。因此，解常规数学问题，通常只能引起数学知识稳步地增长，而不会导致数学思想方法发生根本性的变革。常规问题在数学中是大量存在的，现代数学文献上所见到的文章，大都属于解常规问题的结果，而数学教科书上的习题，基本属于常规问题。

常规问题引起数学知识稳步增长的作用，具体地可归结为下面几个方面：

（1）通过解常规问题，能够为数学理论的形成积累必要的资料。

数学发展的历史表明，任何一个数学理论都不会是突然产生的，而是有一个量的积累过程，即有一个汇集资料（命题、公式、法则等）的渐进过程。常规问题的一个重要作用，就是通过对它们的解答，为已有的资料增添新的内容。那些古老的数学分支学科：算术、三角、初等代数和初等几何等，它们赖以形成的资料，无疑来自解常规问题。这是因为这些资料本身，就属于所要建立的理论内容。

初等几何就是通过解答大量的常规问题，不断积累起丰富的资料，并逐步形成一个理论体系的。初等几何，也称欧几里得几何，它的形成经历了一个漫长的历史过程。公元前三世纪希腊学者欧几里得《几何原本》的问世，标明初等几何已成为系统的理论。我们知道，早在人类古代文明的初期，人们就已经积累了大量零散的几何命题，这些命题都是在尝试解决生产、生活实践中提出的问题过程中得到的。例如，古巴比伦人和古埃及人在解决划分土地和计算土木工程所需材料之类的问题中，得到了诸如三角形、矩形、梯形等简单平面图形面

积和诸如方体、锥体、台体等简单立体体积计算的法则。古希腊学者解决的几何问题就更深刻、更广泛了。例如泰勒斯(Thales, 约公元前640—546)在解决测量塔高和船舶到海岸距离等问题中，提出了三角形相似的原理；毕达哥拉斯学派在解决直角三角形直角边和斜边关系的问题中，提出了著名的毕达哥拉斯定理(即勾股定理)；德谟克利特(Democritus, 约公元前460—357)运用"原子求积法"求得锥体的体积等于等底等高柱体的$\frac{1}{3}$，等等。这些几何成果，都是在解常规问题过程中作出的。随着几何成果的不断积累，人们自然提出这样的一个问题：各个零散的成果之间究竟存在怎样的联系？希腊的学者认真探讨了这个问题。他们把亚里士多德的公理法注入几何中，由此构造出初等几何的理论体系。由于亚里士多德的公理法在当时已经属于知识背景，因此上述问题属于常规问题。

在近、现代数学中，通过解常规问题逐渐积累资料，以至最后形成理论体系的分支学科同样不在少数。常微分方程论就是这样的一门学科。导致常微分方程论产生的最初问题，早在牛顿、莱布尼茨时代就出现了。这些问题，都是在微积分理论框架内提出和解决的，因而属于常规问题。最典型的一个问题是等时问题：求一条曲线，使得一个摆沿着它作一次完全的振动，都取相等的时间。雅各·伯努利最先提出和解决了这个问题。他运用微积分方法求得方程

$$dy\sqrt{b^2y-a^3}=dx\sqrt{a^3}$$

他通过对等式两边积分，得到答案

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=x\sqrt{a^3},$$

这是一条摆线。

雅各·伯努利还解决了弹性力学中的一个问题：受力细杆所具有的形状。他得到方程

$$dy=\frac{(x^2+ab)dx}{\sqrt{a^4-(x^2+ab)^2}}$$

这个方程可用椭圆积分来求解。数学史上著名的"膜盖问题"：船帆在风力作用下的形状，也是与雅各·伯努利的名字联系在一起的。他从这问题中引出二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

这里s为弧长。他还于1695年在《教师学报》提出了著名的伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$$

微积分的创立者牛顿和莱布尼茨，在用微积分解决物理问题的过程中，也提出和解决了许多重要的常微分方程。牛顿研究了著名的"三体问题"：月球在太阳和地球引力作用下的运动状态，从中引出一种常微分方程并构造了它的解。莱布尼茨探讨了形如

$$y\frac{dx}{dy}=f(x)g(y)$$

的方程，并用变量分离法给出了它的解。

随着一阶常微分方程的大量出现，二阶和高阶常微分方程以及常微分方程组，也继而不断产生出来。这些方程也都是在解常规问题的过程中得到的。欧勒和丹尼尔·伯努利(D. Bernoulli, 1700—1782)在这方面作出了突出贡献。例如，欧勒于1743年提出形如

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\cdots+L\frac{d^ny}{dx^n}=0$$

的常系数一般线性方程。时至这时，所积累的常微分方程知识已达到足够建立一门独立分支学科的程度，于是在十八世纪中叶，常微分方程论便应运而生了。

(2)通过解常规问题，能够披露和克服已有理论体系的缺陷，促进理论体系向完善化方向发展。

大凡一个数学理论在形成的初期，都难免带有一定的缺陷。克服这种缺陷的最有效形式，莫过于及时揭露和解决造成缺陷的矛盾了。由于常规问题常常产生在理论的不完善之处，因此解常规问题对于数学理论的完善化是十分重要的。

仍然以初等几何为例。前面已经谈到，欧几里得《几何原本》的问世，是初等几何成为一门独立学科的重要标志。但是，由于时代条件的限制，欧几里得的几何体系并非是完美无缺的，而是有许多尚待克服的缺点和不足。例如基本概念和初始命题(即公理)不够完备：在论述直线上三点的位置时，使用了"介于"关系，却没有明确给出介于概念和顺序公理；在论述线段的相等和图形的全等时，使用了合同的性质，却没有明确给出合同概念和合同公理；在论述图形的面积和体积相等时，使用了连续的性质，却没有明确给出连续概念和连续公理，等等。由于公理系统不完备，必然在论证过程中产生某些逻辑上的漏洞，例如有时凭借经验或图形上的直观来代替严谨的逻辑证明。

科学理论的弱点之处，往往成为科学问题的生长点。针对欧几里得几何体系中的种种缺陷，数学家们自欧几里得时代起便提出了补充、改进几何公理系统的问题。这个问题的解决，既不需要建立新的理论，也不需要创造新的方法，因而属于常规问题。为解决这一问题，历代许多数学家付出了巨大的努力。例如，阿基米得提出了连续公理中重要的一条公理——阿基米得公理；高斯明确了"介于"概念。希尔伯特则于1899

年以他的《几何基础》一书，圆满地结束了对这一问题漫长的讨论。他给出了后来以他的名字命名的公理系统——希尔伯特公理系统。这个公理系统的特点是：

第一，把几何的基本元素"点"、"直线"和"平面"作为不加定义的初始概念引进，它们可以代表任意的对象，从而使几何学摆脱了直观经验的束缚。从逻辑上明确给出了基本元素之间的某些关系：结合关系，即点在直线上，点在平面上；顺序关系，即一点介于两点之间；合同关系，即线段重合、角重合。

第二，公理被划分成五组。每组由若干条公理组成：8条结合公理，4条顺序公理，5条合同公理，1条平行公理和2条连续公理。从这20条公理便可严格逻辑地推演出平面和空间欧氏几何的全部命题。

希尔伯特不仅提出了一个完善的几何体系，并且还提出了建立一个公理系统应遵循的三个原则：相容性、独立性和完备性。这对科学理论的公理化有着深远的影响。

（3）通过解常规问题，能够深刻揭示数学理论之间的内在联系，促使数学不断向整体化方向演进。

数学本来就是一个有机的统一体，但由于数学分支学科的多样性以及人们认识上的片面性，使得各分支学科之间的内在联系和统一性往往被掩盖起来，甚至被歪曲。常规问题的一个重要作用，就是能够揭示和建立起不同学科之间的内在联系，从而促进数学统一性的形成。

我们还是以几何学为例。到了十九世纪上半叶，几何学被分割成若干个分支学科：欧氏几何，罗巴切夫斯基几何，黎曼几何，射影几何以及拓扑学等。由于这些分支学科彼此之间存在着明显的质的差异，因而使人们感到它们是互不相干，甚至是互相排斥的。那么，不同的几何之间是否存在某种内在的联系和统一性？这是十九世纪中叶数学研究的一个重要

课题，也是寻求数学内在统一性的典型常规问题。对此，许多数学家做了认真的尝试。德国数学家F. 克莱因(F. Klein, 1849—1925)最先成功地解答了这个问题。他并没有创造什么新的数学工具，只是巧妙地运用了十九世纪初伽罗华建立的变换群理论。

1872年，克莱因在就任爱尔朗根大学教授职位时，作了题为《关于现代几何学研究的比较考察》的著名演讲，这就是数学史上有名的"爱尔朗根纲领"。这个纲领的中心思想是，可以用变换群观点把几种不同的几何学统一起来，即每一种几何学都对应有一个主变换群，图形在该变换群的变换下保持不变的性质，就是该几何学所研究的对象。于是，几何学就变成了研究在变换群的变换下图形不变性质的科学。按照这种观点，射影变换下的几何学是射影几何学，仿射变换下的几何学是仿射几何学，运动变换下的几何学是欧氏、罗氏和黎氏几何学，拓扑变换下的几何学则是拓扑学等等。这就表明，原来表面上极不相同的几何学之间，竟然存在着深刻的内在联系和统一性。

二、反常规问题

反常规问题是相对常规问题而言的另一类问题。它们与常规问题的本质区别是，这类问题从已有理论的研究中提出，却不能在即有理论的框架内求得解决，也就是说，为解答它们需要开拓新的领域或创造新的方法。常规问题引起数学知识稳步地增长，反常规问题则引起数学在对象、内容和思想方法上发生重大的变革。因此，反常规数学问题在数学发展中往往起着特殊的、重要的作用。

在数学史上，因解反常规问题而导致数学思想方法根本

变革的事例，是举不胜举的。这里仅举两个事例，予以分析和说明。

第一，代数学中著名的"五次方程根式求解问题"。它的解决，导致了群论的建立。

我们知道，早在十六世纪之前，数学家们就成功地找到了一次、二次、三次以及四次代数方程的根式解法。那么，五次和更高次的代数方程是否也存在一般根式解呢？这是摆在十六世纪数学家面前的一个醒目问题。起初，数学家们凭直感认为，既然四次以下代数方程可用根式求解，而且某些特殊的五次代数方程确实存在根式解法，那么，一般五次代数方程必定也能用根式来求解。可在，就是这个看来在初等代数框架内能够得以解决的问题，却是三百年的长时间里难倒了包括卡当、韦达、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧勒、拉格朗日以及高斯在内的许多著名数学家，这个问题之所以有如此大的难度，就是因为它不能在初等代数的框架内求得解决，它的解决需要打开一个全新的数学领域。

事实上，十九世纪初挪威青年数学家阿贝尔和法国青年数学家伽罗华，正是由于创立和使用了一种新的数学工具——群论，才彻底地解决了这道数学难题。不过，他们给出的答案却与原来的意愿完全相反：五次和五次以上的代数方程，根本不存在一般的根式解。

第二，拓扑学中著名的"四色问题"。它的解决，导致了机器证明这一崭新数学思想方法的确立。

"四色问题"亦称"四色猜想"。它是指，用四种颜色就可把所有地图涂上色，使得具有共同边界的国家染有不同的颜色。这问题最早是由德国数学家麦比乌斯于 1840 年提出的。1852 年，英国青年数学家弗南希斯·格思里（F.Guthrie,1831—1899）在对英国地图着色时重新提出了这一问题，并写信告诉

他哥哥弗雷德里克(F.Frederick)。弗雷德里克企图从数学上给予证明，但没能成功，于是便请教他的老师、著名数学家德·摩根(1806-1871)。德·摩根绞尽脑汁，同样没能给出证明。他只好写信给在都柏林的著名数学家哈密顿，请他加以研究。哈密顿思考这问题长达13年之久，直到去世仍无任何进展。

1878年，著名数学家凯莱认识到这问题并非寻常，把它提交给伦敦数学学会。"四色问题"由此便被数学界所周知。开始，数学家们对这问题的难度估计的并不充分，有的甚至把它看得十分简单。例如爱因斯坦的老师闵可夫斯基（H.Minkowski, 1864—1909）在一次讲课中竟要当堂给学生推演出这个证明。结果，他挂了黑板。下一节课他又去推演，又挂了黑板。一连几个星期都照样如此。最后，他只好承认自己没有能力解决这道难题。一百多年来，许多数学家认真研究了它，结果都白费力气了。数学家希伍德(P.J.Heawood,1861—1955)曾坚持奋斗了六十年之久，他虽然成功地证得了"五色猜想"是对的，但却没能判断出"四色猜想"的真伪。

这期间，也有少数人自信给出了"证明"，可是仔细审查发现，均有逻辑上的缺陷。到了本世纪70年代，某些深有卓见的数学家指出，"四色猜想"可能是一个正确的定理，但它需要用一种数学中前所未有的不同方法来论证，这个论证是不能单独用人力来完成的。于是，有人开始转向电子计算机，试图借助机器的力量给出问题的答案。1976年，美国伊利诺斯大学的青年数学家阿佩尔和黑肯等人，就是在这个方向上取得成功的。按照他们设计的程序，计算机运转了1200多个小时，作了两百亿个逻辑判断。如此繁重的工作量和如此之多的逻辑判断，想通过"手工操作"来完成，那是不可思议的。"四色问题"的解决，突破了数学理论证明的传统方法，开创了数学机械化证明的新时代。

三、不可能问题

前面，我们依照问题的解答是否需要开拓新的领域、创立新的方法，把数学问题划分成常规和反常规两种性质不同的类型。这里，我们依照问题的条件是否充分，问题提法的意义是否正确，又可把数学问题划分成这样的两类：一类是可能问题，即问题的条件充分，在提法上意义正确，能够按原有预设求得答案；另一类是不可能问题，即问题的条件不充分，在提法上意义不正确，不能按原有预设求得答案。

可能问题是人们所熟悉的，它们在数学发展中的作用是勿庸置疑的，这里不再赘述。不可能问题对大多数人来说是不受欢迎的，也是科学研究中不常出现的，但它们在数学发展中却往往具有某种特殊的作用，因而有必要加以详细阐述，以便正确对待和评价它们。

不可能问题中，有的其“不可能性”表现得较为明显，容易被辨识出来。例如，“求方程$x^2+2=0$的实根”，“作三角形，使其边长分别为1厘米、3厘米和5厘米”，等等。这样的不可能问题，一般说来，只能起锻炼智力的作用，在科学研究上并无多大意义，不在我们讨论之列。我们这里所论及的不可能问题，是指那些其“不可能性”隐蔽得较深，难以一时被辨识出来的问题。例如，数学史上著名的“几何作图三大难题”，“欧氏第五公设证明”，“五次代数方程根式求解”等，都是难度较大的不可能问题。

不可能问题的一个显著特征是，开始大都以“可能问题”的面目出现，而将其“不可能性”的本质隐藏得很深，以至往往要人们经过数年、数十年、甚至数百年的反复尝试，才能将其本质揭示和确认下来。例如，“几何作图三大难题”，自公元前

五世纪提出，到十九世纪下半叶从理论上被确证为"作图不可能问题"，前后历经两千三百多年；"欧氏第五公设证明"，自公元前三世纪提出，到十九世纪二十年代从理论上被确证为"证明不可能问题"，前后历经两千多年；"五次代数方程根式求解"，自十六世纪提出，到十九世纪上半叶从理论上被确证为"求解不可能问题"，前后历经三百来年。

由于不可能问题的出现，常常给科学研究带来长期的挫折和失败，所以在历史上有人称它们为科学中的"乌云"或"暗礁"。例如，试证欧氏第五公设的长期失败，使得法国数学家达朗贝尔在1759年极为伤感地把欧氏第五公设问题称之为"几何原理中的家丑[1]"。

不可能问题的另一个显著特征是，它们大都是某些可能问题的自然延伸，能够在较长时期内给人以似乎成功的希望，并且通常具有莫大的魅力，使人产生一种不达目的不罢休的劲头。"几何作图三大难题"就是其中的典型。

早在公元前400年左右，古希腊的巧辩学派就提出了这样三个作图问题：三等分任意角，二倍立方体，化圆为方。这三个问题并非凭空设想而来，而是在解决某些简单作图题之后自然引伸出来的。

三等分任意角的提法是：在仅限于用直尺作直线、用圆规画圆弧的条件下，通过有限次步骤，把任一已知角三等分。我们知道，希腊学者最初使用直尺和圆规，曾不费劲地解决了角的二等分问题，接着又很容易地解决了直角的三等分问题。这就自然启示他们去搞任意角的三等分问题，并且相信一定能够达到目的。

二倍立方体的提法是：按上述问题规定的条件，通过有限

1)M·克莱因：《古今数学思想》第三册，上海科学技术出版社，1980年，第283页。

次步骤，作一个体积为已知立方体体积二倍的立方体。这个问题是在希腊学者成功地作出一个面积为已知正方形面积二倍的正方形之后，自然而然地提出来的。他们同样相信，一定能够达到目的。

化圆为方的提法是：按前两个问题规定的条件，通过有限次步骤，作一个面积与已知圆面积相等的正方形。这问题的提出与直线形之间的等积问题直接有关。早在这问题提出之前，希腊学者就通过作两条线段的比例中项，能将矩形化为与其等积的正方形；他们又通过把三角形的高二等分，能将三角形等积地化为矩形，从而也就能化为正方形；由于任意凸多边形可分解为若干个三角形，所以凸多边形也就能化为与其等积的正方形。直线形等积互化的解决，很自然地引导他们去考虑作一个面积与已知圆面积相等的正方形问题。由此便产生化圆为方的问题。他们同样相信，一定能够达到目的。

为解决这三个问题，历代数学家们不知付出了多少心血和精力，然而谁也没能达到目的。在十九世纪之前，几乎世界上每一个重要的科学研究机关，都曾收到过数以千计的三大问题"解答者"的来信。为了摆脱这种无休止的麻烦，1775年巴黎科学院通过一项决议：不再审查关于"三等分角"、"倍立方体"和"化圆为方"的论文。可是，三大难题仍然以其特有的魅力吸引着许多人。1837年凡齐尔(P.L.Wantzel,1814-1848)借助解析几何给出前两个问题不可能性的证明；1882年林德曼(F.Lindeman,1852—1939)通过证明π的超越性，解决了化圆为方的不可能性问题；1895年，F·克莱因又进一步给出三大问题不可能用尺规来完成的简单而明晰的证明。然而，近百年来仍然有人醉心于解三大难题，他们不顾前人的理论证明，试图奇迹般地独步古今中外，成为三大难题的"解答者"。[1)]

1)梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980年版，第45页。

不可能问题之所以“不可能”，主要在于问题的条件或提法不恰当。如果改变问题的条件或提法，它们就有可能得以解决。例如，如果取消“直尺和圆规”的限制，化圆为方是很容易做到的。欧洲文艺复兴时代的大师达·芬奇曾给出一种答案：取一圆柱，使底和已知圆相等，高为半径之半，将圆柱滚动一周，产生一个矩形，其面为 $2\pi r\cdot\frac{r}{2}=\pi r^2$，即矩形面积与已知圆面积相等。再将矩形化为正方形，就可实现化圆为方。

不可能问题虽然本身大都没有什么重大的科学价值，但为了弄清它们的真实性质，却往往需要打开一个全新的数学领域。因此，它们常常成为某些重大数学发现的生长点。“欧氏第五公设证明问题”，为非欧几何发现提供原初的生长点，就是典型的一例。

欧氏第五公设是欧几里得《几何原本》中的初始命题之一，因为它是论及平行线的，所以通常也称为平行公理。它在《几何原本》中的提法是：如果一直线和两直线相交，所构成的两个同侧内角之和小于两直角。那么，把这两直线延长，它们一定在那两内角的一侧相交。由于这个命题无论从语句上还是从内容上看，都不大象公理，倒象是一个可证明的定理，所以《几何原本》一问世，它的注释者和评述者便普遍产生一个疑问：这个命题可能是一个可证的定理，只是由于欧几里得本人没能给出它的证明，才不得不把它放在公理之列。于是，便产生了“欧氏第五公设证明问题”，通常简称“第五公设问题”。

自欧几里得时代起，到十九世纪初非欧几何发现，历代数学家都把第五公设作为一个可证的定理来加以探究，并且坚信迟早会有人给出它的证明。历史表明，几乎《几何原本》传播到的国家和地区，都有杰出数学家带头尝试第五公设的证明。其中比较著名的有：

希腊的阿基米德、波西道尼(约公元前135—公元前50)和托勒玫(C.Ptolemaeus, 约90—168);

拜占庭的普罗克尔、阿卡尼西(约五世纪下半叶)和西姆波利基(约六世纪);

巴格达的阿尔·伽哈利(约九世纪)和伊宾·柯列(约九世纪);

伊朗的安·耐利子(约十世纪)、阿尔·卡西(Al-Kâshî, 约十世纪)、依宾·西思(980—1037)、奥玛尔·海雅姆(O·Al-Khayyam, 1048—1131)和那西尔·艾丁(Nasîr-Eddin, 1201—1274);

埃及的阿尔·海萨姆(Al-Haitham, 965—1039);

西班牙的阿尔·冯松(A.D.Valladolid, 1270—1346);

意大利的格列绍卡诺(F.B. Grisogono, 1472—1538)、科曼地诺(F. Commandino, 1509—1575)、卡塔利特(P.A. Cataldi, 1548—1626)、焦尔达诺(V.Giordano, 1633—1711)和萨开里;

英国的华利斯和普列菲尔(J. Playfair, 1748—1819);

法国的克雷洛(A. C. Clairaut, 1713—1765)、达朗贝尔、拉格朗日、卡诺、拉普拉斯和勒让德;

瑞士的兰伯特;

匈牙利的法·鲍耶;

德国的须外卡尔特、塔乌里努斯;

俄国的古利耶夫(C. E. Гурьев, 1764—1813)和布尼亚科夫斯基(B. Я. Буняковский, 1804—1889)。

非欧几何的发现者高斯、亚·鲍耶和罗巴切夫斯基,也都尝试过第五公设的证明。

有人曾作过统计,历史上有记载的关于试证第五公设的论著至少达250多部(篇)。

由于第五公设本来就是与其它公理在逻辑上相独立的命题，不可能通过逻辑推演把它证明出来，所以全部试证者的努力都是徒劳的。许多人自以为达到了目的，可是仔细推敲发现，给出的各种证明无一不含有逻辑上的漏洞。匈牙利数学家法·鲍耶曾致力于第五公设试证二十多年，到头来毫无所获。长期的挫折和失败使他在精神上遭到极大的刺激，甚至在晚年几乎丧失了对数学的热忱。当他得知儿子亚·鲍耶也醉心于这一问题时，极力劝阻他停止这项工作。他在1820年写信给儿子说："希望你不要再作克服平行线理论的尝试了。你会花掉所有的时间而终生不能证明这个问题。……它会剥夺你一切余暇、健康、休息和所有的幸福。这个地狱般的黑暗将吞吃成千个象牛顿那样的巨人。……这是永远留在我心里的巨创。"[1)]

然而，就在法·鲍耶说这段话的时候，少数远见卓识者透过这"地狱般的黑暗"洞察到了几何学的一片新天地。他们从长期试证失败中得到反面启示，对第五公设问题本身的提法产生怀疑，由此提出原问题的"反问题"：第五公设不可证。这个反问题是一个可能问题，也是一个非常规问题，对它的尝试解决，最终导致了非欧几何的发现。事实上，高斯、亚·鲍耶和罗巴切夫斯基，正是在用反证法论证这个反问题的过程中开拓出非欧几何新领域的。

不可能问题的反问题常常是一个可能问题，而这个可能问题又往往把人们引导到一个新的数学领域。这就是不可能问题在科学研究中的重大价值之所在。希尔伯特在其著名演讲《数学问题》中指出："通过不可能性的证明，这些问题被一种对科学来说是最满意、最有用的方式解决了。我想援引永动机的问题。在构造永动机的努力失败以后，科学家们研究了在这种机器不可能存在的情况下，自然力之间必须存在的

1) 梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980年版，第233页。

关系；而这个反问题引导到能量守恒定律的发现，它反过来又解释了原来希望制造的永动机的不可能性。"[1]"第五公设证明问题"就是数学中的"永动机问题"，对它的尝试努力失败以后，数学家们研究了在这种证明不可能存在的情况下，第五公设和其他公理之间在逻辑上必须存在的关系；而对这个关系的探讨和论证，导致了非欧几何的发现，它反过来又解释了原来希望的第五公设证明的不可能性。

不可能问题不仅能够把人们引导到一个新的数学领域，并且在尝试解决它们的过程中往往还能得到许多具有珍贵价值的成果。从第五公设问题来看，在试证第五公设的过程中，数学家们提出了一连串与第五公设等价的命题，这些命题补充和丰富了欧几里得几何的内容。这样的等价命题不下于十几个，其中著名的是："在直线同侧与直线等距的点的轨迹是一条直线"（波西道尼），"两条不相交直线间的距离有限"（普罗克尔），"对于任意的几何图形，有任意大小的相似形存在"（华利斯），"锐角一边上的垂线必与另一边相交"（勒让德），"三角形的内角和等于两直角"（那西尔·艾丁），"至少存在一个矩形"（萨开里），"存在面积任意大的三角形"（高斯），等等。现今几何教科书中通常采用的平行公理："过直线外一点只能引一条直线与已知直线不相交"，就是十八世纪英国数学家普列菲尔在试证第五公设过程中明确提出来的。

在数学中，象非欧几何这种与解不可能问题密切相关的重大发现并不在少数，群论和微积分就是这样一类重大发现。前面已经谈到，"五次代数方程根式求解"在初等代数范围内是一个非常规问题，它实际上也是一个不可能问题。在数学家们用根式求解五次代数方程遭到一次又一次的失败以后，少

---

1)希尔伯特：数学问题，载《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981年版，第65页。

数富有创见的数学家开始思索问题的反面：五次代数方程不存在一般的根式解法。高斯曾洞察到这一点，但他没有进而去论证这个“不可能性”，而是转向了方程根的存在性证明，著名的代数基本定理的证明，就是他沿着这个方向取得的成果。拉格朗日是最先尝试证明这个“不可能性”的，他虽然没能取得成功，但他在解问题过程中提出和运用的对称多项式、根的置换等，已是群论思想的萌芽。拉格朗日的学生鲁菲尼在证明一般的五次代数方程不能用根式求解的过程中，进一步孕育了群论的思想，不过他的证明同样是不严密的。

拉格朗日和鲁菲尼没有完成的工作，是在阿贝尔和伽罗华手中结束的。1824年，阿贝尔成功地证得：一般的五次代数方程，不能仅靠对其系数施以加减乘除与开方运算而求解。他在证明过程中提出和使用了域的概念，由此加速了群论思想的形成。1830年，伽罗华在《论方程根式求解的条件》一文中，给出了代数方程根式求解的充要条件。他在证明中明确提出和使用了置换群、正规子群和同构等概念。这篇论文的完成，标明群论已经正式进入数学的大雅之堂。

微积分思想的萌芽与化圆为方问题有关。前面已经谈到，古希腊巧辩学派曾提出和讨论过化圆为方问题。他们虽然没能给出问题的正确解答，但在讨论的过程中却提出了一个新颖的思想：用增加圆内接（或外切）正多边形的边数来“穷竭”圆的面积。这一思想被下一世纪希腊学者欧道克斯所发展，建立起一种求曲边形面积、曲面体体积的方法——穷竭法。穷竭法本身已是微积分早期的雏型，它能够有效地解决某些特殊的曲边形面积和曲面体体积。微积分的先驱者开普勒（J. Kepler, 1571—1630）、卡瓦列利（B. Cavalieri, 1598—1647）、华利斯和巴罗等人，正是通过不断改进穷竭法，为牛顿，莱布尼茨最后完成微积分的发现准备了必要的条件。这就告诉我们，

在微积分创立的历史链条上，化圆为方这个古老的不可能问题充当了最原初的一个生长点。

从上面的实例可以看出，某些数学问题虽然就其本身的条件和提法来看是不可解的，但在寻求解的过程中，却能获得比问题本身更有价值的成果。既然如此，那么，我们能否预先判定手中的问题是“可能的”还是“不可能的”？是有“重大价值的”还是“无足轻重的”？一般说来，这是难以办到的。其原因就在于，正确的判断往往要等待到问题的最后或接近最后解决才能作出。

我们认为，一个问题不管其性质如何，只要在尝试解它的过程中能够得到有价值的成果，就值得我们深入探究下去。著名的费尔马大定理：方程$x^n+y^n=z^n$，当$n\geq 3$时没有非零整数解，至今已经提出三百多年了，仍没有任何迹象表明，它最终是否可解。但人们已认识到，它是一个很有价值的问题，因为人们已经从中获得了许多重大成果。例如，库麦尔在试证这一定理的过程中，创立了理想数概念，提出了把一个循环域的数分解为理想素因子的唯一分解定理。这个定理在近代数论中占有重要地位。希尔伯特曾对费尔马大定理有过一段告白，他如果有能力解决这个问题，也不想去解决它，因为他不愿意杀掉这个“生金蛋的母鸡”。

四、希尔伯特23个问题

希尔伯特是本世纪以来贡献最大的数学家之一。现代数学的许多领域都记载着他那显赫的名字：希尔伯特曲线，希尔伯特方体，希尔伯特空间，希尔伯特不等式，希尔伯特变换，希尔伯特不变积分，希尔伯特不可约性定理，希尔伯特零点定理，希尔伯特基本定理，希尔伯特公理，希尔伯特于群和希尔

伯特类域，等等。希尔伯特的成功是与他的独到研究方法分不开的。他的数学研究方法的一个重要特征，就是善于钻研重大而关键的问题。他根据亲身的经历深切体会到，重大而关键的问题是数学活的血液，是推动数学发展的重要动力源泉。事实上，他本人就是从解答不变量理论中著名的“果尔丹问题”开始其数学生涯的，并通过解答一个又一个重大问题，开拓出一个又一个新的数学领域。

1900年，希尔伯特应邀参加巴黎国际数学家代表大会，并在会上作了题为《数学问题》的著名演讲。他在这篇有历史意义的演讲中，强调了重大问题在数学发展中的作用，阐述了重大问题所具有的特点，分析了研究数学问题时常会遇到的困难及其克服的某些方法。他还提出了在新世纪里数学家应去努力解决的23个问题，即著名的“希尔伯特23个问题”。

希尔伯特强调指出：“如果我们想对最近的将来数学知识可能的发展有一个概念，那就必须回顾一下当今科学提出的、期望在将来能够解决的问题。”[1]又指出：“某类问题对于一般数学进程的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分枝能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。”[2]他认为一个好的问题应具有这样三个基本特征：

第一，清晰性和易懂性。这是因为“清楚的、易于理解的问题吸引着人们的兴趣，而复杂的问题却使我们望而却步。”[3]

第二，虽困难但又给人以希望。就是说：“在通向那隐蔽的真理的曲折道路上，它应该是指引我们前进的一盏明灯，最终并以成功的喜悦作为对我们的报偿。”[4]

---

1)、2)、希尔伯特：数学问题，载《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981年版，第61页。

3)、4)同上，第60页。

第三，意义深远。亦即能够使人“发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界。”[1]

希尔伯特提出的23个问题就具有上述的特征。这些问题是他经过近一年的思考，从前辈人遗留下来的和当代人新提出的纷繁众多的数学问题之中，精心挑选出来的。他相信，通过对这些问题的研究解决，必将大大推动二十世纪数学的发展。这23个问题中的头6个问题，与数学基础有关。它们反映出最近在几何基础方面的工作对他的强烈影响和他对公理方法效用的巨大热情。其它17个问题，则是专门领域中的问题。这些领域有数论、不定积分、二次型理论、不变式理论、微分方程论、变分学和拓扑学等。这些问题的选择虽然受到当时数学发展水平的限制，受到他个人科学素养、研究兴趣以及思想方法的影响，不可避免地带有一定的局限性，但仍然不失为通往未来的窗口。正如与他同时代的著名数学家闵可夫斯基所预料的，这篇讲演及其所提出的问题会“在今后几十年的时间里成为人们议论的话题。”[2]

事实上，希尔伯特23个问题一提出，就受到数学界的普遍关注，其中有些问题竟成为许多数学家终生奋斗的目标。一个人只要成功地解决其中的任何一个问题，都会因此而赢得很高的声誉。在希尔伯特发表演讲的当年，他的学生22岁的麦克思·戴恩(M. Dehn, 1878—1952)就给出了第三个问题的部分解答，次年获得完全解答。因此，他的名字被载入数学史册。

关于希尔伯特23个问题研究的情况，可参见下页表。[3]

---

1)、希尔伯特：《数学问题》，载《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981年，第60页。

2)康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年，第88页。

3)选自《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981年，第83—第84页。

表 6—1

问题编号	问　题	推动发展的领域	解　决　情　况
1	连续统假设	公理化集合论	1963年，Paul J. Cohen〔美〕在下述意义下证明了第一问题是不可解的，即：连续统假设的真伪不可能在 Zermelo—Fraenkel 公理系统内判明。
2	算术公理的相容性	数学基础	Hilbert 证明算术公理相容性的设想，后来发展为系统的"Hilbert"计划("元数学"或"证明论")，但1931年 Gödel的"不完备定理"指出了用"元数学"证明算术公理相容性之不可能。数学相容性问题至今尚未解决。
3	两等高等底的四面体体积之相等	几何基础	这问题很快(1900)即由Hilbert的学生M. Dehn给出肯定解答。
4	直线作为两点间最短距离问题	几何基础	这问题提得过于一般。Hilbert之后，许多数学家致力于构造和探讨各种特殊的度量几何，在研究第四问题上取得很大进展，但问题并未完全解决。
5	不要定义群的函数的可微性假设的李群概念	拓扑群论	经过漫长的努力，这个问题于1952年由Gleason、Montqomery、Zippin等人〔美〕最后解决，答案是肯定的。
6	物理公理的数学处理	数学物理	在量子力学、热力学等部门，公理化方法已获很大成功，但一般地说，公理化的物理学意味着什么，仍是需探讨的问题。至于概率论的公理化，已由A. H. Колмогоров〔苏，1933〕等人建立。
7	某些数的无理性与超越性	超越数论	1934年，A. O. Гемфонд〔苏〕和 Schneider〔德〕各自独立地解决了这问题的后半部分，即对于任意代数数 $\alpha \neq 0, 1$ 和任意代数无理数 $\beta \neq 0$ 证明了 α^{β} 的超越性，这一结果至1966年又被A. Baker等人大大推广和发展了。
8	素数问题	数论	一般情况下的Riemann猜想至今仍然是猜想。包括在第八问题中的Goldbach问题至今也未解决。中国数学家在这方面做了一系列出色的工作。

续表

问题编号	问　题	推动发展的领域	解　决　情　况
9	任意数域中最一般的互反律之证明	类域论	已由高木贞治〔日1921〕和E.Artin〔美，1927〕解决。
10	DioPhantius方程可解性的判别	不定分析	1970年，Матиясевич〔苏〕在Robinson、M.Davis、H.Putnan等人〔美〕工作的基础上证明了Hilbert所期望的一般算法是不存在的。
11	系数为任意代数数的二次型	二次型理论	H.Hasse(1929)和C.L.Siegel(1936，1951)在这问题上获得了重要结果。
12	Abel域上的Kroneker定理推广到任意代数有理域	复乘法理论	尚未解决。
13	不可能用只有两个变数的函数解一般的七次方程	方程论与实函数论	连续函数情形于1957年由B.Арнольд〔苏〕否定解决，如要求是解析函数，则问题仍未解决。
14	证明某类完全函数系的有限性	代数不变式理论	1958年，永田雅宜〔日〕给出了否定解决，即证明了存在群Γ，其不变式所构成的环不具有有限个整基。
15	Schubert计数演算的严格基础	代数几何学	由于许多数学家的努力，Schubert演算基础的纯代数处理已有可能，但Schubert演算的合理性仍待解决。至于代数几何的基础，已由B.L.Van der Waerden(1938—40)与A.Weil(1950)建立。
16	代数曲线与曲面的拓扑	曲线与曲面的拓扑学、常微分方程的定性理论	对问题的前半部分，近年来不断有重要结果得到。至于后半部分，И.Т.Петровский〔苏〕曾声明，他证明了$n=2$时极限环的个数不超过3，但这一结论是错误的，已由中国数学家举出反例(1979)。

续表

问题编号	问　题	推动发展的领域	解　决　情　况
17	正定形式的平方表示式	域(实域)论	已由 Artin 于1926年解决。
18	由全等多面体构造空间	结晶体群理论	问题的第一部分(欧氏空间中仅有有限个不同类的带基本区域的运动群)于1910年由L.Bieberbach 肯定解决;问题的第二部分(是否存在不是运动群的基本区域但经适当毗连可充满全空间的多面体)已由 Reinhardt (1928)和Heesch(1935)分别给出三维和二维情形的例子;至于将无限个相等的给定形式的立体在空间中给以最紧密排列的问题,至今尚未完全解决。
19	正则变分问题的解是否一定解析	椭圆型偏微分方程理论	这问题在下述意义上已获解决:1904年,C.Бернштейн〔苏〕证明了一个两个变元的、解析的非线性椭圆方程,其解必定是解析的。这个结果后来又被Бернштейн本人和И.Г.Петсовский〔苏〕等推广到多变元和椭圆组的情形。
20	一般边值问题	椭圆型偏微分方程理论	偏微分方程边值问题的研究正在蓬勃发展。
21	具有给定单值群的线性微分方程的存在性	线性常微分方程大范围理论	已由Hilbert本人(1905)和H.Röhrl〔德,1957〕解决。
22	解析关系的单值化	Riemann曲面论	一个变数的情形已由 P.Koebe〔德,1907〕等人解决。
23	变分法的进一步发展	变分法	Hilbert本人和许多其他数学家对变分法的发展作出了重要的贡献。

五、数学问题的源泉

数学问题的宝藏是无穷无尽的。老的问题解决了,新的问题又会出现。在每一代数学家的面前,总是摆着大量诱人

的尚待解决的问题。那么，产生数学问题的源泉是什么呢？追溯重大数学问题产生的历史，可以看出，产生数学问题的源泉主要有三个：

（1）社会实践。实践是人类认识的总源泉，自然也是数学问题取之不尽、用之不竭的丰富源泉。数学是反映现实世界中的量及其关系的，因此，最初的数学问题无疑来自于外部世界，是外部世界提供的。不言而喻，促使初等几何、初等代数、三角等古老学科产生的最初数学问题，是由人们的生产和日常生活实践提供的。不仅如此，就是在近、现代数学中，也有不少分支学科是在回答实践提出的问题的基础上，逐渐萌发、孕育起来的。线路拓扑学就是这样的一个典型学科。

线路拓扑学思想的萌芽可追溯到欧勒的工作。欧勒在十八世纪上半叶给出了线路拓扑学的两个重要定理，这两个定理由之而来的原始问题：哥尼斯堡七桥问题和凸多面体的面、顶、棱问题，都是从实践中直接提出来的。

哥尼斯堡七桥问题产生于十八世纪的哥尼斯堡城。哥尼斯堡位于立陶宛之西，原为东普鲁士首府，第二次世界大战后划归苏联，改名为加里宁格勒。有一条名叫普累格尔的河横贯城区，这条河有两个支流，它们在城中心汇合后流入波罗的海。市内有七座各具特色的大桥，连接河心岛、半岛和两岸，如图6.1所示。河心岛上有一座古老的大学，一座大教堂，还

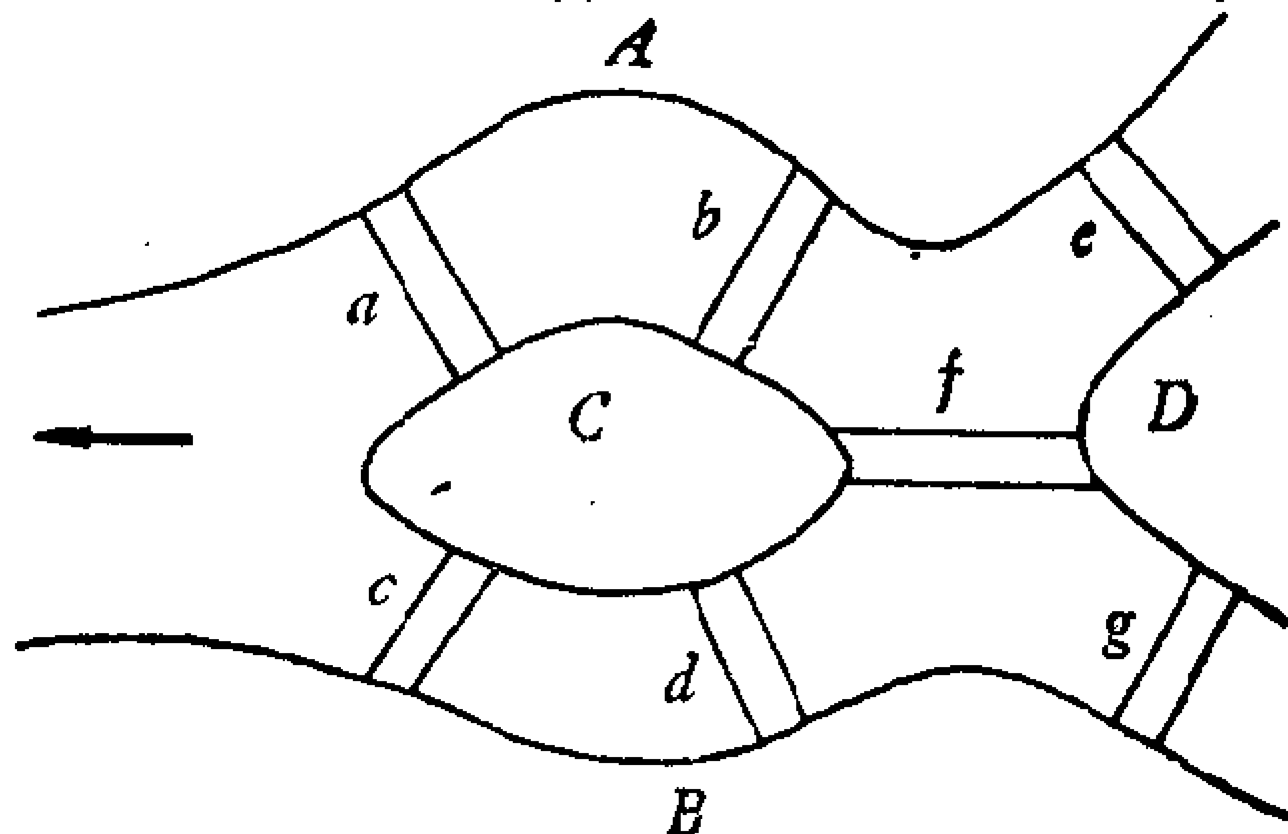


图6.1

有著名哲学家康德的墓地和他的半身塑像。每到傍晚或节假日，许多居民来到这里散步，观赏美丽的风光。久而久之，有人就对七座桥的配置方式发生了兴趣，并提出一个新颖的散步路线：通过这所有七座桥，但不准在任何一座桥上重复通过。这就是数学史上有名的"哥尼斯堡七桥问题"。

为找到这样的散步路线，人们做了种种尝试，但都没能达到目的。1735年，有几名大学生写信给当时任彼得堡科学院数学教授的欧勒，请他帮助解决。欧勒经过反复思索，从中抽象出这样一个数学问题：如果用点A、B、C、D表示陆地，用线a、b、c、d、e、f、g表示桥，如图6.2所示，试问是否可无重复地画出这个图？进而，欧勒考虑了更一般的问题：通过一个连通图中每一条边一次且仅一次的充要条件是什么？欧勒成功地解决了这个问题。他证明出，一个连通的无向图，具有通过这个图中每一条边一次且仅一次的路，当且仅当它的奇次顶点的个数为0或2。在哥尼斯堡七桥问题中，图中A、B、C、D四个顶点都为奇次，即奇次顶点的个数为4，所以它不存在通过每一条边一次且仅一次的路。欧勒的答案，使哥尼斯堡的居民们十分满意，他们不再做这种无希望的尝试了。

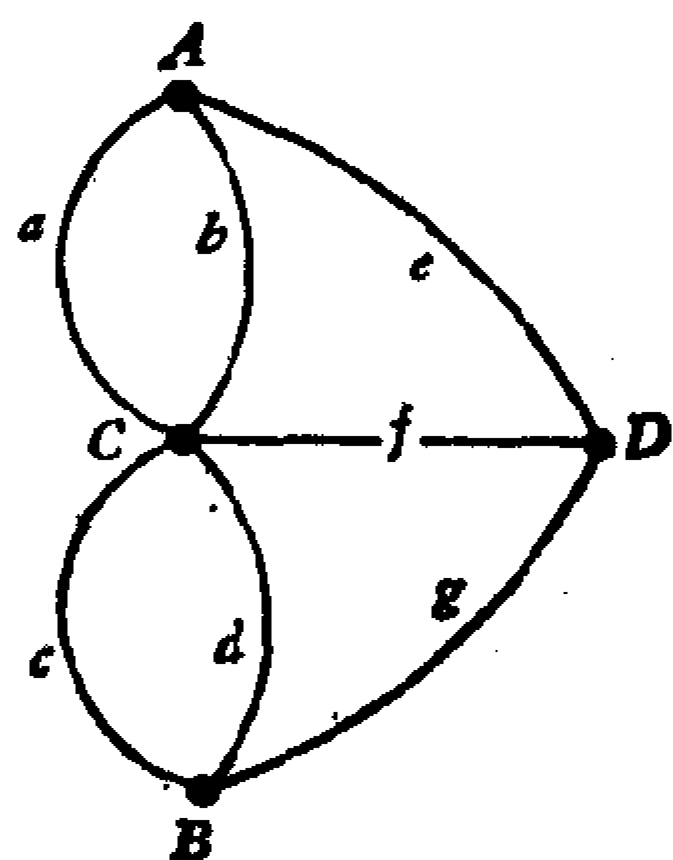


图6.2

凸多面体的面、顶、棱问题，也是人们从实践中直接提出来的。在生产和生活实践中，人们经常遇到各种多面体：立方体，三棱柱，五棱柱，方锥，三棱锥，八面体以及截角立方体等。起初人们只是对它们的面数、顶数和棱数有一个定性的认识，即三者是相互制约的。然而，人们并不满足对事物的定性认识，于是渐渐地提出了这样一个问题：凸多面体的面数、顶数和棱数之间是否存在某种确定的量的关系？笛卡儿和莱布尼

茨曾探讨过这个问题，可是他们的研究结果，却在他们死后二百多年的1860年，才被人们所知道。1750年，欧勒首次公开发表自己独立研究的结果。他指出：任何闭的凸多面体的面数F、顶数V和棱数E之间有关系：$F+V-E=2$。这就是线路拓扑学中有名的欧勒公式。1751年，欧勒又给出了这个公式的严格证明。

（2）自然科学。数学从来就与自然科学有着彼此影响、相互作用的关系，数学为自然科学提供定量描述的工具，自然科学则向数学提供大量富有成果的问题。在数学发展的历史上，自然科学始终以提问者的身份刺激着数学的发展。源于自然科学的数学问题，从对数学的作用和影响来看，大体上可归结为两类：一类是延伸性问题，即对已形成的数学理论起着扩展成果的作用；另一类是开拓性问题，即对数学理论的形成起着生长点的作用。后一类问题往往导致数学在思想方法上发生质的变化，因而对于数学的发展显得尤为重要。下面以变分学和偏微分方程论为例，对开拓性问题的由来和作用加以简略分析。

变分学作为分析学的一个分支学科，是研究函数的极值理论的。导致它产生的最初问题是："面积最小的旋转曲面"，"最速降线"，"变形薄膜的平衡"，"等周线"和"测地线"等。这些问题，几乎都是从物理学研究中直接提出来的。这里，仅对前两个问题作以分析。

面积最小的旋转曲线问题，是牛顿在研究物体在水中的运动时提出的。它的内容是：轴向以常速度运动的旋转曲线，应具有何种几何特性，能使所受流体阻力最小？这个问题的数学实质是：求使积分

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{y(x)[y'(x)]^3}{1+[y'(x)]^2}dx$$

达到最小值的被积函数$y(x)$，这里$y(x)$表示绕x轴旋转生成曲面的曲线，如图6·3所示。牛顿在1694年致朋友的一封信中给出了自己的解法。

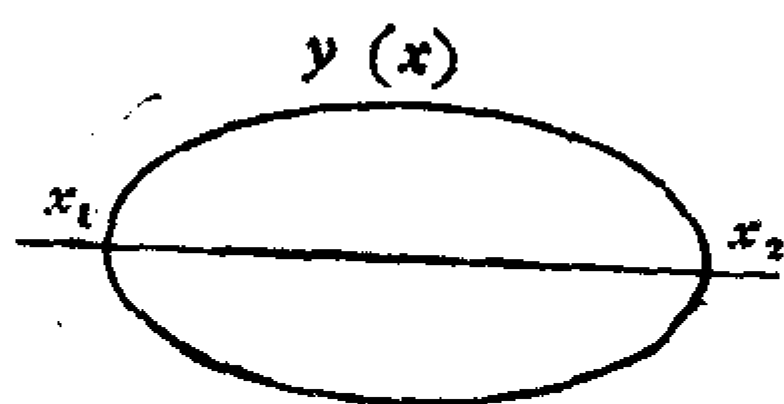


图6.3

最速降线问题的提法是：一个质点从某一定点无摩擦地下滑到不在它垂直下方的另一点处，沿着什么样的曲线运动，所花费的时间最短？早在1630年，伽利略在研究质点运动时就提出了这个问题。他当时凭直觉猜测这样的曲线应是一条圆弧。后来，德国数学家约翰·伯努利(J·Bernoulli, 1667—1748)对伽利略的解法提出了怀疑。1696年6月，他在《教师学报》上作为向同代数学家的挑战，把这个问题又重新提了出来，引起许多数学家的兴趣。不到一年时间，牛顿、莱布尼茨、约翰本人以及他的哥哥雅各·伯努利都求得了正确的答案：最速降线是联结两点的上凹的旋轮线，如图6.4所示。他们的各种解法都发表在1697年5月的《教师学报》上。这些解法虽然各不相同，但问题的实质是一个：选择被积函数$y(x)$，使得积分

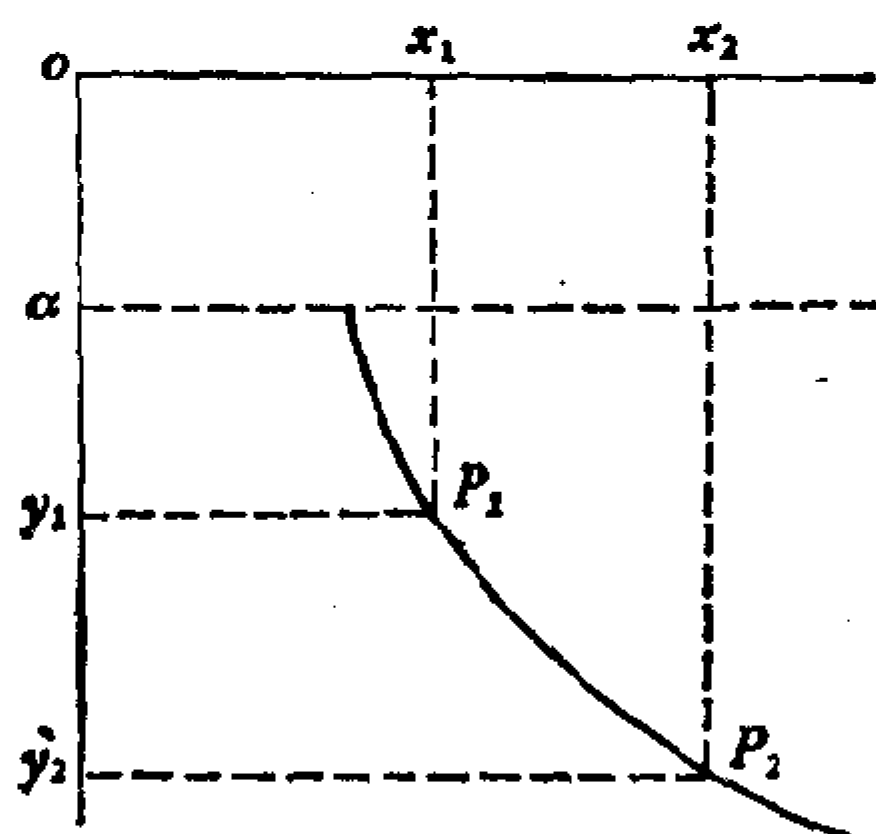


图6.4

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)-\alpha}}dx$$

取最小值，其中g为重力加速度，$\alpha=y_1-u_1^2/2g$，u_1为在时间x_1时的初速度。

上述两个问题的共同特点，在于它们提出了一个积分，要

求确定出使积分达到极大或极小的被积函数，而这正是变分学研究的基本内容，因此它们也就成为变分学产生的重要生长点。

和变分学一样，导致偏微分方程理论建立的最初问题，是由物理学和天文学等提供的。其中以弦振动问题最为典型。弦振动是数学和力学研究中的一个古老的课题。早在公元前六世纪，希腊的毕达哥拉斯学派就热烈讨论过音乐弦的音谐和弦长之间的关系。从十七世纪开始，随着力学的蓬勃发展，弦振动问题又以新的形式重新提了出来：求振动弦上任意点在某一时刻离开平衡位置的距离。

对弦振动问题的研究，导致弦振动方程即二阶偏微分方程的建立。1727年，约翰·伯努利在给他儿子丹尼尔·伯努利的一封信和一篇论文中提出，对于两端固定的弦上的点x，它在时刻t离开平衡位置的距离函数$u(x,t)$应满足方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\alpha^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

其中 $\alpha^2=\frac{T}{\sigma}$，$T$ 是弦的张力，σ是单位弦长的质量。因为弦固定在端点$x=0$和$x=l$处，所以方程的解必须满足边界条件

$$u(o,t)=0,\qquad u(l,t)=0$$

若$t=0$时，弦被拉到某形状$u=f(x)$，然后放开让其自由振动，那么弦上质点的初始速度应为0，于是有问题的初始条件

$$u(x,0)=f(x),\qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

约翰·伯努利、欧勒、达朗贝尔以及年轻的拉格朗日先后给出了这个问题的不同解法。就这样，以偏微分方程为对象，以求

解偏微分方程为基本内容的数学分支学科——偏微分方程，便逐渐建立起来了。

（3）数学体系内部。数学的发展有其相对的独立性，这特别表现在当一门数学分支学科形成理论体系之后，它就开始以一个真正提问者的身份出现，借助各种逻辑组合以及一般化、特殊化等方式，不断地向自身提出新的问题。这类问题，我们称为数学体系内部问题。数学体系内部问题产生的方式，大体上有以下两种：

第一，出现已有理论不能解释的数学新事实。我们知道，任何一门数学理论形成体系之后，它总是要通过运算、逻辑推演等方式尽可能地扩大自己的范围，由此便会产生一些新的事实，而当某些新事实不能被已有概念、理论所解释时，就会出现疑难（即问题）。

例如，在代数学中，解方程$x^2+2=0$，求得$x=\pm\sqrt{-2}$。如果在实数范围内进行运算，那么$\sqrt{-2}$就是实数理论所无法解释的新事实，由此便产生负数的平方根是否为数的问题；在几何学中，传统的曲线定义是：连续函数表示的点的集合。可是魏尔斯特拉斯等人却在数学研究中发现存在处处连续而处处不可微的函数，没有导数就意味着曲线没有切线，这是传统曲线概念所无法解释的。于是便产生了究竟什么是曲线的问题，等等。

特别值得提出的是，悖论作为一种既不能被已有理论解释，又无法从已有理论框架中排除掉的诘难，是理论体系内部矛盾的深刻表现。数学悖论虽然并不经常出现，但是一旦出现就会引出一连串的重大问题。在数学的历史上，曾出现过一些有名的悖论。

“不可通约悖论”。毕达哥拉斯学派在应用毕达哥拉斯定

理(即勾股定理)解决数学问题时发现,正方形的对角线与边长的比不能表示成整数或整数之比。这一事实虽然是逻辑推演的必然结果,却与已有的数概念和数学观念相悖,又无法从数学中排除掉。据传说这一事实是毕达哥拉斯学派的成员希帕索斯(Hippasus,约公元前五世纪)最先发现的,因此也称为"希帕索斯悖论"。为消除这一悖论,毕达哥拉斯学派试图把单子概念引进数学,单子是一种本身不可度量的单位。那么,单子究竟是零还是非零?如果是零,则无穷多个单子相加还是零;如果不是零,则由无穷多个单子组成的有限线段应当具有无限的长度。无论怎么解释都不行。这就引起了数学史上的"第一次危机"。不可通约悖论深刻地揭露了整数概念和连续量的矛盾,提出了数概念的扩张问题,这个问题最终以承认无理数的存在和实数理论的建立而得到圆满解决。

"无穷小悖论"。它是由微积分基本概念含混不清引起的。我们知道,牛顿和莱布尼茨在建立微积分理论时,为说明微分是什么,提出了无穷小概念。可是,这一概念一提出就是十分模糊的。牛顿和莱布尼茨在逻辑推演过程中,时而把无穷小当作零,时而又当作非零。无论怎样处理,都会出现逻辑矛盾。对此,英国大主教贝克莱(G.Berkeley,1685-1753)抓住这一点死死不放,攻击无穷小是"逝去了的量的鬼魂"。因此,历史上通常把无穷小悖论称之为"贝克莱悖论"。无穷小悖论的产生,直接导致了数学史上的"第二次危机",由此提出微积分理论的严密化问题。这个问题最终以柯西极限理论、康托尔集合论和戴德金实数理论的建立而得以解决。

"集合论悖论"。它出现在十九世纪末,是以几种不同方式提出来的。其中比较有名的是康托尔最大基数悖论,布拉利-福尔蒂最大序数悖论以及罗素悖论等。这些悖论的出现表明,集合论本身包含着深刻的矛盾,没有相容性。由于集合论的

相容性是整个数学相容性的支柱，因此集合论悖论的出现是对数学基础的一次有力冲击，并由此引起数学史上的“第三次危机”。由集合论悖论而引起的问题是十分深刻的，不仅涉及到集合概念本身，而且还涉及到数学体系的相容性以及数学的可靠基础是什么等一连串的根本性的问题。

第二，老问题引伸出新问题。在数学中经常出现这样的现象：某个问题一旦解决，随后就会引伸出新的问题，甚至有时在尝试解决问题的过程中，就会从中派生出新的问题。

例如，数学史上著名的“化圆为方”问题，是在十九世纪末得到解决的。可是，不久便由之产生了新形式下的“化圆为方”问题：是否可借助几何等可分解概念，用曲线来切割圆，把它拆成有限块几何图形，之后再把这些块拼补成正方形？这个问题由杜宾等人于1963年解决，答案同样也是否定的。就在这个问题解决之前，1925年，波兰数学家巴拿赫(S. Banach, 1892—1945)等人在集合论概念的基础上提出另一种形式的“化圆为方”问题：平面上的图形能否和一个具有相同面积的正方形等可分解？这个问题至今仍未得到解决。

再如，十九世纪上半叶，当平面上向量的表示法及其运算因复数理论的建立而得以解决后，不久便产生了空间向量的表示法及其运算问题。这个问题于1843年由哈密顿以发现四元数而得以解决。尔后由此又引伸出更一般的问题：是否可构造具有某种特殊性质的多元数？对此，哈密顿本人提出拟四元数概念，凯莱提出八元数概念，伦敦大学数学和力学教授克利福德(W.K.Clifford, 1845—1879)则提出和构造了n元数

$$a_0+a_1e_1+a_2e_2+\cdots\cdots+a_{n-1}e_{n-1}$$

其中$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}$是实数，$e_1, e_2, \cdots\cdots, e_{n-1}$起着复数中的虚数单位作用，且$e_i^2=-1$，$e_ie_j=-e_je_i(i\neq j)$。

从数学体系内部提出的问题，一般说来，具有较大的抽象性，甚至有时离现实世界较远，显得很不合乎"情理"。例如，负数的开方问题，连续函数的和是否连续问题，没有切线的曲线的长度问题，没有切面的曲面的面积问题，等等。这类问题有时从表面上看似乎并无多大意义，但如果把它们放在历史中去考察，我们就会惊奇地看到，为建立和发展自然科学的某些重要概念、重大理论所需要的数学工具，往往是在这些概念、理论建立之前的数年、数十年、甚至数百年、数千年之前，就由数学家们在尝试解答这类问题的过程中，预先创造出来了。例如，量子力学中描述原子系统运动规律的矩阵理论，早在量子力学诞生的六十多年之前，就在解决线性方程组问题的过程中确立起来了；相对论理论中描述时空几何特性的黎曼几何，早在相对论理论诞生的五十多年前，就在解决几何内部问题的过程中创立出来了；理论结晶学中使用的群论，波动学中使用的微分和积分算子的本征函数展开理论，现代控制论、信息论中使用的勒贝格积分等，都是数学家们在解决数学体系内部问题的过程中，预先提供好了的。

第七章 数学争论

数学在其发展过程中，自始至终存在着不同观点的分歧与争论，而这种分歧与争论又是推动数学向前发展的一种强大力量。这里，我们通过回顾某些数学概念、理论形成和发展历史，以及数学基础研究历史，对引起数学争论的若干原因及争论在数学发展中的作用，作以简略的分析。

一、由新思想与旧观念之间的矛盾而引起的争论

任何新的数学成果都是在已有数学成果的基础上产生和发展起来的，当新的数学思想与旧的数学观念相背离时，新思想的支持者与旧观念的维护者之间，便会因观点上的分歧而展开争论。

历史上围绕无理数所展开的漫长争论，就是主要由新思想与旧观念的矛盾而引起的。无理数产生于公元前六世纪毕达哥拉斯学派对不可通约线段的发现。毕达哥拉斯学派虽然最先发现了无理数，但他们却不肯接受这种数，因为无理数的出现是与他们的数学信仰相冲突的。他们认为，任何数都可以表示为整数之比，反之，就不应当看作是数。在这种旧的观念支配下，他们不把无理数看作是真正的数，只是仅仅把它们当作一种依附于几何量的形式上的符号。

那么，无理数究竟是一个真正的数，还是一个形式上的符号？在这个问题上，新数的支持者与旧观念的维护者之间展

开了长期论战。十八世纪之前，大部分数学家对无理数持否定态度，就连象帕斯卡、巴罗和牛顿这样著名的数学家，也把无理数看作表示几何量的一种符号，认为它们脱离开连续的几何量便不能存在。与这样看法相反，也有少数数学家坚持认为无理数是真正数，是独立于几何量存在的抽象的数。其中具有代表性人物是斯台文（S.Stevin，1548—1620）、华利斯和笛卡儿。斯台文还试图用有理数逼近来表示无理数。

在这期间，还有一部分数学家对无理数表示出一种矛盾心理。他们一方面随意使用无理数进行各种计算，另一方面却怀疑它们的意义和存在的真实性。德国数学家史提非（M.Stifel，1486—1567）说的一段话，就是这样矛盾心理的典型反映。1544年，他在《整数算术》一书中说："在证明几何图形的问题中，由于当有理数不行而代之以无理数时，就能完全证出有理数所不能证明的结果，……因此我们感到不能不承认它们确实是数，迫使我们承认的是由于使用它们而得出的结果——那是我们认为真实、可靠而且恒定的结果。但从另一方面讲，别的考虑却迫使我们不承认无理数是什么数。例如，当我们想把它们数出来（用十进制小数表示）时，……就发现它们无止境地往远跑，因而没有一个无理数实质上是能被我们准确掌握住的……。而本身缺乏准确性的东西就不能称其为真正的数……。所以，正如无穷大的数并非数一样，无理数也不是一个真正的数，而是隐藏在一种无穷迷雾后面的东西。"[1]

从十八世纪开始，随着数学研究的深入，有更多的无理数陆续发现。特别是1737年欧勒证明了e和e^2是无理数，兰伯特证明了π是无理数。这就使得支持无理数的人越来越多。为

1)M.克莱因：《古今数学思想》第一册，上海科学技术出版社，1979年版，第292页。

了从理论上弄清无理数的本质和意义，有人开始给出无理数严格定义。1860年，魏尔斯特拉斯提出用递增有界数列来定义无理数；1872年戴德金（R.Dedekind, 1831—1916）提出用“分划”来定义无理数；康托尔则提出用有理“基本序列”来定义无理数。这些定义，从不同方面深刻揭示了无理数本质。尽管这样，反对无理数的还大有人在。其中反对得最为激烈的是直觉主义的代表人物、柏林大学数学教授克隆尼克（L.Kronecker, 1823—1891）。他认为，只有能够从整数出发，用有限次步骤构造出来的数才是可接受的，而无理数不能用这种方法构造出来，因而是不可接受的，应当从数学中砍掉。他甚至公开提出要取消与无理数有关的理论。对此，他同魏尔斯特拉斯、康托尔以及希尔伯特等人进行了激烈论战。有一次，他甚至直接指责数学家林德曼：“你对于π的美丽研讨有什么用处？无理数是不存在的，为什么要研究这种问题呢？”[1]克隆尼克等人对无理数的取消主义遭到绝大多数数学家的反对。因为直至这时，无理数已在数学中取得了巩固的地位。

和无理数一样，虚数也是在同旧数学观念漫长的论争中逐渐确立起来的。早在文艺复兴时期，法国巴黎大学医学家丘凯（N.Chuquet, 1445—1500）在研究方程问题时就接触到了虚数。1848年，他在其《算术三篇》中提出，由方程 $4+x^2=3x$ 可以得到 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$。但他却受传统数学观念的束缚认为对负数开平方是不可能的，因而作了否定解释。卡当曾详细讨论过虚数，1545年，他在《重要的艺术》一书中提出并解出如下一个应用题：把10分成两部分，使其乘积为40。他列出方程$x(10-x)=40$，求得两个根：$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$。

1)M.克莱因：《古今数学思想》第四册，上海科学技术出版社，1981年版，第308页。

在解三元方程时，又遇到了虚数根问题。可是，同样，由于受传统数学观念束缚，他保留了方程的正数根和负数根，而对虚数根却略去不提，因为在他看来，虚数根是“诡辩的”。

在虚数产生的初期，也有少数人是承认它们的，其代表人物是邦别利和基拉德(A.Girard，1595—1632)。1572年，邦别利在《代数》一书中自由使用虚数进行了各种运算，并造出了虚数单位的乘法运算表，然而他对虚数的用途却表示怀疑，认为它太“玄”。基拉德则进了一步，他不仅承认虚数存在，而且认为它们有自己特殊的用场。他在《代数中的新发明》一书中，针对虚数无用的观点反驳道：“有人可以说这些不可能的解有什么用？我回答：它有三方面用途——一是因为能肯定一般法则，二是因为它仍有用，并且除此之外没有别的解。”[1]

十七、十八世纪的数学家对虚数大都仍采取否弃的态度。笛卡儿把方程根分为两类：一类是实根，另一类是虚根。他给出了“虚数”这个名称，但又认为它不是真正的数，因而摒弃了方程的虚根。牛顿给出了二次方程$ax^2+bx+c=0$的根和判别式$\Delta=b^2+4ac$之间的关系：$\Delta>0$时有不等实根，$\Delta=0$时有相等实根，$\Delta<0$时有虚根。他同样认为虚数没有实际物理和几何意义，在他看来，只有那些在物理上和几何上没有实解的问题，才是虚数根。这些人之所以不肯接受虚数，主要不是因为它们破坏了已有的运算法则，而是因为它们与已有的数学观念不相容。

在这期间，也有不少数学家的态度是矛盾的，他们一方面乐于接收这种新数，因为它们在数学运算上有用；另一方面又由于不能彻底摆脱传统数学观念的束缚，而不肯把它们放在

1)M·克莱因：《古今数学思想》第一册，上海科学技术出版社，1979年，第294页。

与实数同等的地位。欧勒就是这样态度。1777年，他首次提出以符号“i”(拉丁字 imaqinarius 的第一个字母)代表$\sqrt{-1}$。他强调虚数在实际计算中有着重要作用，但又认为它们是一种“不可能数”或“幻想中的数”。他在1768年于俄国出版的《对代数完整的介绍》一书中说道：“因为所有可以想象的数都或者比0大，或者比0小，或者等于0，所以很清楚，负数的平方根不能包括在可能的数(实数)中。从而我们必须说它们是不可能的数。然而这种情况使我们得到这样一种数的概念，它们就其本性说来是不可能的数，因而通常叫做虚数或者幻想中的数，因为它们只存在于想象之中。”[1]

为了揭示虚数的现实意义，新数的支持者开始去寻求虚数及复数的几何直观表示。沿着这个方向最先进行尝试并取得成果的是英国数学家华利斯。他提出一种设想：在平面上画一条数轴，在数轴上标出复数的实部，过表示实部的这一点作一条垂直于实轴的直线，在该直线上截取线段，使其长度等于表示与$\sqrt{-1}$相乘的那个数，那么，线段的端点即表示虚部，这条线段根据这个数的正负分别在不同方向截取。华利斯的设想由于缺乏适用性，没能引起数学家普遍注意。

挪威自学成才的测量员威塞尔(C. Wessel, 1745—1818)是历史上第一个将复数巧妙地在笛卡儿平面上表示出来的人。1797年，他在给丹麦科学院的论文《方向的解析表示，特别应用于平面与球面多边形的测定》中提出，在x轴上用$+1$表示正方向的单位，在y轴上用单位$+\varepsilon$表示$\sqrt{-1}$，则任何一个复数$a+b\sqrt{-1}$都可用单位$+1$和$+\varepsilon$来表示。威塞尔的论文尽管有很大价值，但长期未被注意，直到1897年被译成法文重新发表后，才受到重视。瑞士日内瓦的一位名叫阿工

1)M.克莱因:《古今数学思想》第二册，上海科学技术出版社，1979年，第347页。

(J.R.Argand, 1768—1822)的图书管理员也有类似威塞尔的思想，1806年，他发表题为《虚量，它的几何解释》的小册子，提出用术语“模”来表示 $a+bi$ 的长度，阿工的思想具有创新性，他的著作曾一度遭到某些数学家的反对。

在复数的几何表示方面，作出突出贡献并在学术界产生较大影响的是“欧洲数学之王”——高斯。他首次明确引进术语“复数”，并且提出可用数对(a, b)来表示 $a+bi$，而(a, b)又可用笛卡儿平面上相应的点来表示。这样，如果用 x 轴表示实轴，用y轴表示虚轴，笛卡儿平面就变成了复数平面。高斯在1799年就掌握复数平面思想，但他出于慎重长期没有公开发表出来，直到1837年才由哈密顿把它公诸于世。自高斯等人的工作之后，复数便开始得到数学家，物理学家以及哲学家们的普遍理解，并由此发展出分析学的一个新领域——复数函数论。后来，随着复变函数论在电工计算、机械设计和流体力学等领域得到广泛的应用，虚数也就逐步取得了学术界的公认和赞美。

二、由新成果不完善而引起的争论

大凡一项重大数学成果并非一开始就完美无瑕，而常常带有这样或那样的缺陷。因此，人们对新成果的评价也就不会没有分歧，于是便会引起不同见解的对立和争论。数学史上这样的事例是很多的。

围绕着微积分理论基础而展开的争论，在历史上曾持续长达二百多年。引起这场争论的主要原因，就在于它兴起的初期有一些逻辑上的缺陷。这些缺陷大体可归结为两类：一是某些基本概念含糊不清，例如无穷小量在牛顿的著作中，有时是零，有时不是零而是有限的量；二是某些推理不严谨，例

如在牛顿和莱布尼茨那里，导数运算的结果虽然正确，但推理过程却含有逻辑漏洞，他们开始预先假定一个非零的有限增量，尔后却又把它当作零略去，这就违反了逻辑的同一律。

由于存在着种种缺陷，所以牛顿-莱布尼茨的微积分一建立，就遭到某些人的批评和指责，由此产生激烈的论战。英国大主教贝克莱就是激烈的反对者之一。他于1734年出版了一本书，书的标题很长：《分析学家：或致一个不信教的数学家。其中审查现代分析的对象、原则与推断是否比之宗教的神学与信条，构思更为清楚，更为清晰，或推理更为明显》。在这本书中，他指责牛顿的微积分法，为计算x^n的流数（导数），先将x取一个不为零的增量Δx，并将x^n的增量被Δx除得到

$$nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x+\cdots$$

尔后却又改变原先的假定，突然令$\Delta x=0$求出流数nx^{n-1}，这违背了同一律，是"依靠双重错误你得到了虽然不科学却是正确的结果"。[1]

对于贝克莱的批判，牛顿的支持者作了反驳，1734年朱林（J.Jurin，1684—1750）发表了《几何学，非不信教的朋友》，在文中他为牛顿的微分法作了辩护，坚持认为牛顿的流数术对精通几何的人来说是清楚的，并试图给牛顿的"瞬"与"数流"等概念以清楚的解释。对此，贝克莱于1735年发表《捍卫数学中的自由思想》一文，指责朱林是在捍卫他本人也不理解的东西。朱林进行了回击，但没能把道理讲清楚。牛顿的支持者洛宾斯（B.Robins，1707—1751）也参加了争论。他在1735年发表的《牛顿爵士的流数法以及最初比与最终比方法的本质与可靠性》一书中，强调了牛顿的流数的思想是正确的，然而

1）M．克莱因：《古今数学思想》第二册，上海科学技术出版社，1979年版，第150页。

他本人却不承认无穷小量的存在。为了回击贝克莱的攻击，马克劳林(C. Maclaurin, 1698—1746)在1742年发表的《流数论》一书中，试图以几何直观和希腊的穷竭法为基础建立微积分的严密性，但他的努力并没能达到目的。

和牛顿一样，莱布尼茨的工作也遭到激烈的批判。荷兰物理学家和数学家尼文太(B. Nieuwentijdt, 1654—1718)在1694年出版的一本书中，批评莱布尼茨的微分方法含糊，难以使人理解它的本质和意义。他还质问：为什么无穷小量的和能是有限的量？为何在推理过程中要略去无穷小量？1695年莱布尼茨在《教师学报》的一篇文章中，给出了自己的回答。但这一回答并不能使他的批评者满意，实际上，他本人也没能真正把无穷小、导数和微分等基本概念搞清楚，更不用说给出精确的定义和描述了。

无论是牛顿、莱布尼茨本人，还是他们的支持者，都没能真正澄清微积分理论基础中的混乱，没能从理论上驳倒他们的反对者，以至法国数学家罗尔(M. Rolle, 1672—1719)告诫人们，对微积分要小心，因为它是巧妙的谬论的汇集。他本人则极力避免使用微积分，在解决问题时，他宁肯使用繁难的代数方法而不愿运用微积分这一方便工具。微积分学中著名的“罗尔定理”：在$f(x)=0$的两个相邻实根之间，$f'(x)=0$至少有一个实根，其中$f(x)$是多项式。这一定理不是罗尔直接运用微分法得到的结果，而是用纯代数的方法推演出来的，只是后人把这个定理冠上了他的名字而已。

微积分基础的缺陷，不仅引起它的反对者的种种异议，而且在它的支持者内部也激起了争端。为了严密微积分的基础，澄清由基本概念模糊而造成的思想混乱，许多数学家从不同的角度提出各自的方案，试图把微积分重新建立在可靠的基础上。对此，柏林科学院于1784年作了悬赏，征求“对数学中

称之为无穷的概念建立严格和明确的理论”。总的看来，所提出的方案大体上有三类：一类是维持有关无穷小量的现有算法；另一类是设法完全放弃无穷小量的概念；第三类是利用极限的方法为微积分提供论证和说明的工具。

提出第一类方案的，除了牛顿、莱布尼茨同时代的追随者外，下一世纪的法国数学家卡诺是一个具有代表性的人物。1797年他在《关于无穷小算法的形而上学思想》一书中，详细讨论了无穷小概念，并对历史上定义无穷小量的各种方法作了系统的分析。他认为，所有这些方法在实际运用中都有自己的地位，一种方法对解决某些问题比较方便，而另一种方法则对解决另一些问题比较方便。在分析以往无穷小定义的基础上，他给出了自己的解释：无穷小量既不是真正消失的量，也不是真正小于某个有确定值的量，而只是这样的量，根据该问题和命题的条件进行计算时，为了求在这些量的值变化时量与量之间的比，在计算过程中这些量始终是变化的，并且是在连续地变小，直到变成任意小。他认为，如果这样理解无穷小量，就不会有任何不确定的感觉，也就不会引起任何争论了。卡诺试图用一系列的例子来证明自己的理论是正确的，然而他并没能真正地解决问题，只不过是对牛顿、莱布尼茨的方法作了一些改进。

提出第二类方案的代表人物是法国科学家，当时任柏林科学院院长的拉格朗日。为了使微积分摆脱无穷小量带来的各种困扰，他极力回避使用无穷小量，而把各阶导数定义为函数幂级数展开式的相应系数。这种作法，虽然能够有成效地解决微积分中的某些重要问题，但是在许多问题上却遇到了难以克服的困难，而且他所建立的算法比莱布尼茨的要复杂得多，在实际应用上很不方便。

提出第三类方案的代表人物是法国数学家达朗贝尔和柯

西。达朗贝尔首次尝试把极限概念作为微积分的基础，他在《百科全书》中给出了变量极限描述性的定义，但这个定义比较模糊，缺乏严密性，因而不能完全解释贝克莱等人对微积分提出的诘难。达朗贝尔的想法是由柯西大体上实现的。柯西的思想集中体现在《分析教程》(1821)年、《无穷小计算讲义》(1823年)和《无穷小计算在几何中的应用》(1826年)这三部著作中。他在1821年的著作中，首次提出刻划极限的ε方法，从而在极限概念"算术化"的方向上迈出了决定性的一步。现今通常使用的极限定义"柯西定义"或"ε-δ定义"是半个世纪以后经魏尔斯特拉斯的改进才完成的。柯西把极限概念作为微积分的基础，为无穷小量的整个运算提供了可靠的根据。十九世纪末，康托尔、魏尔斯特拉斯和戴德金等人，正是沿着柯西开辟的道路，建立起集合论和实数理论，完成分析学的逻辑奠基工作的，从而结束了因微积分基础不牢而造成的长达三百多年的争论局面。

在现代数学中，因成果本身不完善而引起的争论，也是俯拾皆是的。突变理论就是正处于争论之中的一个数学新分支。

突变理论是由法国数学家伦尼·汤姆(R.Thom)于1968年提出的，1972年他出版《结构稳定性和形态发生学》一书，系统地阐述了这一理论，由此引起了数学界的普遍注意。它的基本思想是，运用拓扑学、奇点理论和结构稳定性等数学工具，描述客观世界各种形态、结构的突然性变化，如水结成冰或化成汽、桥梁崩坍、胚胎变异、人的情绪波动等。

由于突变理论正处在形成阶段，并未构成一个完整的、有系统的严谨体系，有些概念还很模糊，有的证明还不够严格，因此学术界对它的评价也就不同。一种观点认为，突变理论的诞生，是数学界的一次智力革命，是微积分以后最重要的发

现。英国瓦维克大学著名数学教授E.C.齐曼(E.C Zeeman)就是持这种观点的一个代表人物。他从1970年开始致力于突变理论研究。他认为，突变理论有着传统理论所不能取代的特殊的作用，微积分理论能解释光滑地连续变化的现象，突变理论则能描述不连续的突然变化现象。他对突变理论在物理学、工程学、医学以及人文科学某些方面的应用给予了充分的肯定。他在1976年4月号《科学美国人》杂志上发表的《突变理论》一文，集中地反映了他的观点和某些研究成果。

另一种观点认为，突变理论是一种无稽之谈，它的证明不严格，用词含糊，滥用数学理论，学术界必须对它保持怀疑。英国数学家H.J.萨斯曼(H.J.Sussmann)和他的助手R.S.赞勒(R.S.Zahler)，就是突变理论的激烈反对者。他们在英国《自然》杂志第269卷第5631期(1977年10月27日)上发表《突变理论的主张及其应用结果》一文，针对汤姆和齐曼等人的观点提出了尖锐的反对意见。他们认为，突变理论在数学中是站不住脚的，它只能“带来失望、白费时间”，“应用的结果至少在生物学和社会科学领域内是毫无意义的。”[1] 他们不承认突变理论是研究不连续现象的一种数学方法，认为“它的惊人的失败必将令人产生重大的怀疑。”[2] 萨斯曼和赞勒还列举了突变理论的主要错误和缺陷，如混淆了连续性概念，预测和事实相矛盾，预测缺乏可检验的真实性等等。这场争论究竟要持续到何时，现在还很难预料。不过，可以肯定一点，在突变理论没发展到成熟、完善的阶段之前，对它的理论和应用上的评价，是很难取得一致看法的。

---

1) R.S.赞勒、H.J.萨斯曼：突变理论的主张及其应用结果，载《世界科学译丛》第二辑，上海科学技术出版社，1978年版。

2) 同上。

三 由哲学观点不同而引起的争论

数学在它的历史发展中，总是处在各个时代的哲学思潮影响之下的。特别是当新的数学成果具有深刻的认识论意义时，对新成果的评价就往往会因哲学观点的不同而引起分歧和争论。这在数学史上是时常发生的。

历史上围绕着微积分理论基础而展开的论战之所以十分激烈，除了微积分理论本身存在逻辑缺陷这一主要原因外，还有来自社会方面的原因，这就是微积分的创立从根本上触犯了宗教神学的利益，因而必然招致维护宗教神学利益的唯心主义者的反对。前面谈到的英国大主教贝克莱，就是反对得最厉害的一个。贝克莱是历史上有名的主观唯心主义者，他有句格言：存在就是被感知。这句格言集中反映了他的唯心主义观点。他之所以拚命反对牛顿的微积分学，正是出自他的宗教神学信仰和唯心主义观点。我们知道，微积分理论是研究现实世界运动和变化的数量规律的一门科学、它的基础是变量概念，而宗教神学认为，世界是由上帝一手创造出来的，它从创立那时起就是永恒不变的。因此贝克莱预感到，牛顿的理论给唯物论以支持，是对宗教神学信仰的挑战和威胁，牛顿的挚友哈雷(E.Halley，1656—1742)是不信仰宗教的。曾戏谑过基督教的教义。因哈雷的影响而使贝克莱的朋友在病床上拒绝宗教祈祷的慰藉。于是，贝克莱决心写书向哈雷所支持的微积分开火。他在书中极尽讥讽挖苦之能事，歪曲微积分原理并不比基督教的教义更加清楚。他嘲弄流数(导数)只不过是"消失了的量的鬼魂""能消化得了二阶或三阶流数的人，是不会吞食了神学论点就要呕吐的。"[1]

---

1) M，克莱因：《古今数学思想》第二册，上海科学技术出版社，1979年版，第151页。

以贝克莱为代表的唯心主义者对微积分理论的攻击，一方面激起了数学家更加注意对新方法的改进和对新原理的严密论证，另一方面也促使人们从哲学上为新理论提供坚实的基础。对新理论的辩证唯物主义分析，是由伟大的思想家、革命导师马克思和恩格斯作出的。恩格斯在《自然辩证法》和《反杜林论》中，科学地解释了由于引用无穷小量的概念而产生的疑问，并指出不仅微积分的概念，就是它的方法，在现实世界中都存在着原型，因而它们是现实世界数量规律的反映。在《自然辩证法》一书中，恩格斯写道："自然界运用这些微分即分子时使用的方式和所依据的规律，完全和数学运用其抽象的微分时的方式和规律相同。"[1]马克思在《数学手稿》中，对导函数、微分等概念的辩证性质进行了深刻的论述，并对十九世纪以前的微积分，就它三个不同的发展阶段——神秘的微分学、理性的微分学和纯代数的微分学，从哲学上作了系统的概括和总结。马克思和恩格斯的工作，为微积分理论提供了可靠的哲学基础。

对数学成果作以唯心主义的解释，在数学家中也是不乏其例的。例如，莱布尼茨对虚数本质的解释，就带有浓厚的唯心主义色彩。他在1702年说道："圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的瑞兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚数的－1的平方根。"[2]再如，本世纪初法国大数学家彭加勒在数学领域提出了唯心主义的"约定论"观点。他认为，数学不过是为了描述经验的多样性的方便而采用的一种约定系统，比如几何学的公理就是有条件的约定，它的价值和真实性决定于它们的内容的简单和使用上的方便，而与现实世界的规律无关。

1)M.恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第246页

2)克莱因：《古今数学思想》第二册，上海科学技术出版社，1979年版，第295页．

数学的思想与方法，从本质上看是与唯物主义相一致的，它的每一项重大成果都给唯物主义以支持，给唯心主义以打击。因而，唯心主义与唯物主义的分歧和斗争，贯穿在数学发展的全部历史之中，就成为必然的了。

四、由认识水平的局限而引起的争论

人们对数学成果的评价正确与否，与认识水平有着直接的关系。由于个人认识水平以及所处时代科学技术、社会实践发展水平的限制，而往往使得人们对某些数学成果在评价上产生分歧，并由此引起争论。

历史上之所以出现关于负数的争论，其主要原因就是由于数学家们的认识水平不同所造成的。我们知道，负数自十五世纪在欧洲出现之后，对它的意义和价值便产生了分歧的看法。开始，数学家们大都对负数持以排斥的态度，不承认它们是数，更不承认它们是方程的根。例如，韦达就提出应把负数从数学中取消掉；丘凯和史提非声称负数是“荒谬的数”；帕斯卡则认为从较小的数减去较大的数，特别是从零减去一个数，“纯属是胡说”；帕斯卡的密友、神学家兼数学家阿尔诺(A. Arnauld，1612—1694)指出，$-1:1=1:-1$是“不可思议的”，因为-1小于1，那么较小数与较大数的比，怎么能等于较大数与较小数之比呢？这一问题在当时引起许多数学家的兴趣。

也有少数数学家同意把负数当作一种形式上的符号使用，但又不承认它们是真正的数。卡当在解方程时使用了负数，可是他仅把它们视为一种符号，理由是它们是虚拟的，不是方程真正的根。笛卡儿虽然接受负数，但也认为它们并不真正存在，他称方程的负根为“假根”。莱布尼茨对负数的态度

同样是动摇的，他一方面支持阿尔诺的反对意见，另一方面却又承认式子$-1:1=1:-1$在形式上是正确的。华利斯承认负数的存在，可他对负数意义的认识却是错误的，他认为负数并非小于零，而是大于无穷大。还有一部分数学家明确表示承认负数，并认为它们在数学中是有用的。例如，邦别利和斯台文提出，负数在计算中有用，应允许负数作方程的根。基拉德则更进了一步，他对负数和正数等量齐观，认为两者都有同等存在的权利。他用减号来表示负数。

对负数的争论一直延续到十八、十九世纪。在十八世纪，突出的反对者是英国数学家马塞雷(F. B. Masères, 1731—1824)。他在1759年发表的《专论在数学中使用负号》一文中指出："就我所能判断的而言，它们只会把方程的整个理论搞糊涂，而且把一些就其本质说来是出奇地明显简单的东西搞得晦涩难懂、玄妙莫测…。因此很希望代数里决不容许有负根，或者说再一次把它们从代数里驱逐出去；因为如果这样做了，那么就有很好的理由去设想，那些现在被许多知识渊博、机敏过人的人用来进行代数运算的、模糊不清并和一些几乎是不能理解的概念纠缠在一起的东西，从此将从代数中清除掉；一定会使代数(或普遍的算术)，就其本性而言，在简洁明了和证明能力方面，成为不亚于几何的一门科学"[1]。法国数学家卡诺和欧勒也坚持认为，负数的使用将导致谬误的结论。欧勒还错误地相信负数比无穷大还大。鉴于对负数的分歧意见，达朗贝尔在撰写《百科全书》"负数"这一条目时颇为伤脑筋，他不想介入无休止的争论，因而把这一条目写得十分含混。在条目的最后他写道："对负数进行运算的代数法则，任何一个人都是赞同的；并认为是正确的，不管我们对这些量有什么

1)M.克莱因：《古今数学思想》第二册，上海科学技术出版社，1979年，第345页。

看法。"[1]

直到十九世纪上半叶，人们对负数的认识才取得较为一致的看法。然而，仍有个别人无视负数的广泛用场，对负数存在的合理性提出异议。例如，伦敦大学数学教授、著名数理逻辑学家德·莫根于1831年在《论数学的研究和困难》中说："虚数式$\sqrt{-a}$和负数式$-b$有一种相似之处，即只要它们中的任一个作为问题的解出现，就说明一定有某种矛盾或谬误。只要一涉及到实际的含义，二者都是同样的虚构，因为$0-a$和$\sqrt{-a}$同样是不可思议的。"[2]但是，德·摩根等人的观点已不再有更多的支持者，因为此时负数在数学中已经站稳了脚跟。

三角级数的意义和作用，曾是十八、十九世纪引起数学家们长期争论的一个问题。在十八世纪，随着对复杂物理现象研究的深入，数学家们开始着手解决天文学、力学和热学中提出的大量偏微分方程问题。由于大多数偏微分方程不能通过代数函数的积分来求解，于是他们转而求助于无穷级数。三角级数最初出现在弦振动方程的可允许解中。1727年，约翰·伯努利把一条长为l的平置的均匀弦沿铅直方向的振动问题，化为一个二阶偏微分方程的边值问题。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} & (t\geqslant 0,0<x<l)\\ y(0,t)=y(t,l)=0 & (t\geqslant 0)\end{cases}$$

这类方程在1734年、1743年又分别出现在欧勒和达朗贝尔的著作中。1749年，欧勒指出：振动弦的一切可能的运动，无论弦的形状如何，关于时间都是周期的，因此，可用三角函数的迭加来描述。他还进而提出，如果振动弦的初始形状是

1) M.克莱因：《古今数学思想》第二册，上海科学技术出版社，1979年版，第350页。

2) 同上，第345页。

$$y(0,x)=\sum A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

那么可得到形如

$$y(t,x)=\sum A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}$$

的特解。由此，三角级数引起了数学家们的普遍兴趣。

那么，偏微分方程的可允许解是否都可表示成三角级数？或者，一般地，是否任意函数都能用三角级数来表示？这个问题在十八、十九世纪上半叶激起了一场激烈的争论。开始，争论是在欧勒、达朗贝尔、拉格朗日以及丹尼尔·伯努利等人之间展开的，而在十八世纪的六十年代和七十年代表现得最为强烈。拉普拉斯在1779年也参与了进来，他站在达朗贝尔一边。各方持不同意见，他们互相指责，又互相纠正。例如，丹尼尔·伯努利坚持认为，任一解析函数都可用三角函数表示，欧勒和达朗贝尔对此则坚决反对。拉格朗日对丹尼尔·伯努利的看法表示支持，由此又遭到欧勒和达朗贝尔的激烈批评。达朗贝尔以函数$x^{\frac{2}{3}}$为例证明自己的观点，拉格朗日则在1768年8月15日致达朗贝尔的一封信中提出反驳，指出：$x^{\frac{2}{3}}$可以表示成

$$x^{\frac{2}{3}}=a+b\cos 2x+\cos 4x+\cdots\cdots$$

达朗贝尔回信表示反对，并给出相反的论断。

到了十九世纪，法国数学家富立叶(J.Fourier, 1768—1830)登场了。他在研究热传导问题时提出，每一个函数都可以展开成三角级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \sin nx, 0<x<\pi$$

这个看法在上一世纪已由丹尼尔·伯努利等少数人提出过，但

后来被欧勒等人给否定了。富立叶并没有被前辈人的意见所左右，他从大量的函数出发，得出结论：不管在区间 $0<x<\pi$ 以外情况如何，这个级数在区间 $0<x<\pi$ 上总是表示 $f(x)$ 的。他认为，两个函数可以在一给定的区间上相合，但不一定在此区间外相合。他指出，十八世纪的数学家之所以不接受任意一个函数可展开成三角级数，其原因正是在于没有看到这一点。他还给出了后来以他的名字命名的级数"富立叶级数"：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

他没能给出这个级数收敛性的证明。富立叶的思想是先进的，他的工作标志着人们对函数级数展开式的认识，已从解析函数或可展成台劳级数的函数中解放出来。三角级数可在一整段区间上表示一个函数，而一个台劳级数仅能在函数是解析的点附近表示该函数。

拉格朗日坚持欧勒的观点，反对富立叶的理论。他对富立叶1807年致巴黎科学院的一篇论文，以缺乏严密性为由作了否定的鉴定。在这篇论文中富立叶明确地提出，任意函数可以展开成三角级数。这篇论文直到1824年富立叶当上科学院秘书才得以发表。

数学家们之所以对三角级数的态度不一，并由此产生分歧的看法，一个重要原因就在于它们不能保证收敛性。许多数学家坚决反对使用发散级数，认为它们不可靠，容易造成谬误。阿贝尔在1826年的一封信中说："发散级数是魔鬼的发明。把不管什么样的任何证明建立在发散级数的基础之上都是一种耻辱。利用发散级数人们想要什么结论就可以得到什么结论，而这也是为什么发散级数已经产生了如此多的谬误和悖论的原因"。[1]柯西也明显地反对使用发散级数，他在一次

1） M.克莱因：《古今数学思想》第四册，上海科学技术出版社，1981年，第37页。

科学报告会上提出了级数收敛性理论，对级数的使用作了严格的限制。阿贝尔和柯西等人的意见使数学家们对级数的使用变得格外小心起来。在柯西报告之后，拉普拉斯急忙对自己的《天体力学》一书进行了仔细的审查，直到认定书中的全部级数确实都是收敛的才放下心来。与此同时，阿贝尔和柯西的作法引起了激烈的争论。法国数学家大都支持阿贝尔和柯西的排除发散级数的意见，但却遭到英国和德国许多数学家的反对。他们认为，发散级数虽然不可靠，但在许多运算上却很有用，并且是发现新事物的一种有效工具，特别是在天文学研究中，因为这种级数的开始很少几项就能给函数以有用的数值逼近，尽管从整体上看级数是发散的。剑桥大学数学教授皮科克（G. Peacock, 1791—1858）指出："想要回避发散级数的形成就和回避收敛级数的形成一样都是不可能的…。企图在符号运算中排斥使用发散级数，必将对代数公式和运算的普遍性强加上一种限制，这是完全违反科学精神的。"①德·摩根在1842年的《微分和积分计算》一书中，极力为使用发散级数作辩护，他说："代数的历史向我们表明，没有什么事情是比排斥自然出现的方法更没有根据了，排斥这种方法的理由是在一个或几个虽然正确的情形中由于使用了这种方法而导致错误的结论。这就告诫我们要小心使用但不应该拒绝这种方法；如果宁愿拒绝而不是小心使用的话，那么负量，尤其是它的平方根，就会成为代数进步的一个有力的障碍……而且甚至发散级数的拒绝者们所毫不担心地涉及的那些巨大的分析领域也就不会有那么多发现，更会缺少优美而永久的发现。"②在德国，象德·摩根这样承认发散级数的数学家是比较

---

① 同上页注，第36页。

② 同上，第37页。

參的，他们为发散级数在数学中的合法权利而进行的论证，持续了几十年之久。

争论一直持续到十九世纪末才告结束。经彭加勒、斯蒂吉斯（T.J.Stieltjes, 1856—1894）和波雷尔（E.Borel, 1871—1956)等人的努力，数学家们对诸如三角级数这样的发散级数的意义和作用基本上取得了一致的认识：第一，它们可以用来给函数作数值逼近；第二，可以在运算上代表函数；第三，可以用于求解微分方程；第四，可以用它对积分估值；第五，发散级数的“和”，并不是像传统作法那样，将愈来愈多的项依次相加，而是有自己的特殊的“可和性”概念。

值得指出的是，对数学中“超前发现”的评价，往往导致激烈的争论。所谓超前发现，是指那些超出所处时代科学技术、社会实践需要的数学发现。这类发现大都是在解决数学体系内部问题的过程中形成的，而且在形成之后又一时找不到它们的现实用场，从而难以使人理解它们的意义和价值。

非欧几何就属于近代数学史上的一项“超前发现”。我们知道，非欧几何是解决数学体系内部问题的产物，是由德国的高斯、匈牙利的亚·鲍耶和俄国的罗巴切夫斯基在尝试解决欧氏第五公设问题过程中创立起来的。它自十九世纪二十年代产生，到六十年代末取得学术界的公认，前后经历四十多年。在这四十多年间，非欧几何之所以长期招致异议，它的创立者遭到指责、反对和攻击，一个重要的原因，就在于这项重大发现远远超出了当时人们的数学认识水平，远离人们的经验知识，并且没能找到它在现实世界中的原型和用场。

首先，从当时数学发展的水平来看，还没有一种能证明非欧几何无矛盾性的方法。就连非欧几何的发现者高斯、亚·鲍耶和罗巴切夫斯基也对此无能为力。罗巴切夫斯基曾长期尝试用分析法给出这个证明，但始终没能达到目的。这就无

法消除人们的怀疑：已经推演出的非欧几何命题，彼此之间没有任何逻辑矛盾，但能否保证以后的推演也不会出现逻辑矛盾呢？

其次，从人们的经验认识和平直空间观念来看，日常生活范围空间的属性是欧几里得几何的，也就是说，欧氏几何的原理总是和人们的实践经验相一致，和人们的平直空间观念相符合。而非欧几何的原理却与人们的经验认识以及平直空间观念格格不入，诸如“三角形的内角和小于二直角”，“不存在相似的三角形”，“三角形的面积随着边长的增加而减小”等等。罗巴切夫斯基虽然曾预言非欧几何适用于巨大尺度空间，并且对观测到的尽可能大的天体三角形作过角欠计算，但他却没能检验出由恒星组成的天体三角形具有非欧几何的性质。这就难以使人相信非欧几何具有现实合理性。

正是由于非欧几何无论从理论还是从实践上都难以使人置信，因而对它的异议和指责也就成为不可避免的了。可以设想，如果当时能够给出非欧几何的无矛盾性证明，并找到它在现实世界中的用场，那么，非欧几何这一重大发现是会很快得到学术界公认的。事实上，到了十九世纪六十年代，当贝特拉米、彭加勒、凯莱、希尔伯特等人相继给出非欧几何在欧氏空间平面上的模型后，立即消除了人们对非欧几何无矛盾性的怀疑。特别是在本世纪初，非欧几何在相对论中成功地得到了应用，现代天文观测又证实巨大质量周围空间的几何性质是非欧几何的。这就使非欧几何的真理性得到实践的检验，非欧几何也就由此获得了进一步的发展。

五、由思想方法片面性而引起的争论

数学争论的产生有时还与数学家们的思想方法有关。比

如，由于思想方法的片面性，使得某些数学结论、数学方法在一部分数学家看来是有意义和有价值的，而在另一部分数学家看来却是没有意义和没有价值的，由此便产生不同意见的分歧和争论。现代数学史上，对数学基础问题的探讨而引起的几个流派之间的激烈论战，就与各流派思想方法的片面性有关。

数学究竟以什么作为自己妥善的基础？这是数学家和哲学家们历来关注的一个重要问题。早在两千多年前，希腊学者就对数的本质、数学与现实的关系等进行过热烈的讨论，并由此产生毕达哥拉斯数的神秘主义和柏拉图的数的唯心主义。在后来的数学发展中，人们对数学基础的探讨，以及由此引起的争论，从来没有停止过。到了本世纪初，集合论悖论的出现和数学理论体系相容性问题的提出，使得对数学基础的探讨更加深入，由此引起的争论也就变得格外激烈起来，并逐渐形成三个不同的流派：逻辑主义、直觉主义和形式主义。

逻辑主义学派主张把数学还原于逻辑，试图在逻辑的基础上建立全部数学。在他们看来，数学不过是逻辑的自然展延，数学可以从逻辑推导出来，因此数学即逻辑。

逻辑主义派的先驱者是德国的戴德金和弗雷格（G.Frege，1848—1925）。戴德金在用集合的概念定义自然数时，便主张把数学还原于逻辑。他在1887年发表的《数的性质与意义》一文中，明确提出：把算术、代数和分析归为逻辑的一部分，把数的概念看作是运用逻辑规律的直接结果。弗雷格创建谓词逻辑，给出了逻辑的公理基础，但他的真正目标是把数学建立在逻辑的基础上。戴德金和弗雷格的工作都因遇到不可克服的矛盾而遭到挫折。有趣的是正当集中体现弗雷格观点的《算术的基本法则》第二卷即将交付印刷的时候，罗素（B.A.W.Russell，1872—1970）来信把集合论的悖论告诉了

他。他十分沮丧地在卷二的结尾写道："一个科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成的时候它的基础垮掉了。当这部著作只等付印的时候，罗素先生的一封信就使我处于这种境地。"[1]

逻辑主义派的真正创立者是英国的罗素和怀特海(A.N. Whitehead, 1861—1943)。他们的主张集中体现在其合著的三卷本《数学原理》(1910—1913)中。他们最终的目标是要把全部数学奠基在逻辑上，而逻辑的公理又是任意的，没有内容的。因此，在他们看来，数学只不过是一种没有内容只有形式的逻辑体系。罗素曾公开宣称：数学是这样一门学科，在其中我们永远不会知道我们所讲的是什么，也不会知道我们所说的是不是真的。

直觉主义派也称构造主义派，他们主张数学产生于直觉，认为只有能直觉地感受到的东西才有意义，数学的对象只能由心智所构成，数学的真理性与经验无关。他们不同意逻辑主义派把数学归于逻辑的主张，认为不是数学依靠逻辑，而是逻辑依靠数学，逻辑命题不过是一种更为普遍的数学命题。在他们看来，数学思维先于逻辑和经验，决定数学思维正确性的，既不是逻辑，也不是经验，而是一种带构造性的直觉。因此，他们否认康托尔的无穷集合理论，否认无理数的存在，甚至连n次代数方程有n个根这类定理也加以排斥，因为这个定理没有指出算出n个根的方法。

直觉主义派的思想可追溯到古希腊的毕达哥拉斯学派。但历史上第一个典型代表人物是十九世纪末德国的克隆尼克。他认为自然数在直观上是最清楚的，因而也是最可接受的数。他有句名言："上帝创造自然数，其它的都是人造的"，

---

1) M.克莱因：《古今数学思想》第四册，上海科学技术出版社，1981年，第301页。

意思是说，只有自然数是真实存在的，其余都不过是人为做出的一些文字符号，因而是不可信的。他拚命地反对无理数，超限数以及连续函数的理论，因为它们不能通过有限步骤清楚地构造出来。克隆尼克的观点在当时没能得到更多人的支持。

彭加勒是继克隆尼克之后持直觉主义观点的第二个代表人物。他否认罗素的选择公理，认为按选择公理而作出的集合，不能保证可构造性，因而不能承认其存在。

系统地提出直觉主义观点的是荷兰的布劳威（L. E. J. Brouwer, 1881—1966）。他第一个最彻底地贯彻了直觉主义的观点，通常把他看作是直觉主义派的创立者。他明确提出，数学的基础只可能建立在具有构造性的程序上。他不承认存在不可违背的逻辑原则，因而也就不承认数学非遵守逻辑规律不可。布劳威和他的学派试图按自己的观点去建立一种新的数学，然而他们并没有达到自己的目的。

形式主义派的创立者是德国的希尔伯特。他和他的学派主张数学本身就是一群内部无矛盾的形式系统，它的各个分支学科都有各自的公理系统。在每个公理系统中，基本概念都是没有任何物理意义的，公理也只是一串串的符号，数学思维的对象就是那些没有任何内容的抽象符号，符号就是数学的本质，数学的真理性则在于每个公理系统的相容性。为了证明数学的相容性，他们提出了所谓“希尔伯特方案”：首先把所有数学形式化，然后去证明形式化以后的公理系统的无矛盾性。为此，他们建立了证明论（即元数学）。可是，正当他们自信即将完成对算术和集合论无矛盾性的证明时，美籍奥地利数理逻辑学家哥德尔（K. Güdel, 1906—1978）于1931年发表了著名的“不完全性定理”：形式数论系统的无矛盾性的证明不可能在形式数论系统中实现，即包括着数论的任何形式系

统都必定含有逻辑上不可断定的命题。希尔伯特方案由此宣告破产了。

二十世纪上半叶，围绕着数学的可靠基础究竟是什么这个问题，三个学派之间展开了长期激烈的论战。直觉主义派既不接受逻辑主义派的观点，也不接受形式主义派的观点，它的代表人物彭加勒在其《科学与方法》一书中宣称："逻辑主义必须加以修正，而人们一点也不知道还有什么东西可以保留下来。"[1]他甚至讥讽地说："逻辑派的理论并非不毛之地；它生长矛盾。"[2]另一代表人物魏尔(H. Weyl, 1885—1955)则批评逻辑主义派的作法是"对我们信仰力量的压制，不下于早期教会神父和中世纪经院哲学家的教条"[3]对于形式主义派，直觉主义派同样采取否定的态度。布劳威在1925年指出：公理化的办法，形式主义的办法，当然都会避免矛盾，但是用这种方法不会得到有数学价值的东西。一个错误的理论，即使没有因矛盾而告终，也仍然是错误的，正如一种罪行，不论法庭是否禁止都是有罪的。他还批评希尔伯特的作法是用无意义的符号进行无意义的纸上游戏。魏尔也批评道："希尔伯特的数学许是一种美妙的公式游戏，甚至比下棋更好玩；但是它与认识毫无关系，因为那是公认的，它的公式并不具有可借以表示直观真理的那种实在意义。"[4]

对于直觉主义派的批评，形式主义派给予了针锋相对的反驳。希尔伯特批评直觉主义派，是要把他们所不喜欢的所有数学知识都砍掉，他们不准在数学中使用排中律，这是对科学的一种背叛。他说："禁止数学家用排中律，就象禁止天文

1） M.克莱因：《古今数学思想》第四册，上海科学技术出版社，1981年，第309页。
2） 同上，第307页。
3） 同上，第307页。
4） 同上，第322页。

学家用望远镜或拳师用拳一样。"[1] 直觉主义派的主张在当时遭到大多数数学家的反对。有一次，布劳威访问哥廷根大学，在那里发表一篇演说。演说结束后，有一个人反对他的观点："您认为我们不可能知道π的十进小数表示中是否会有十个9连续出现，……我们也许不可能知道，但上帝知道嘛！"[2]布劳威当时满不在乎地回答道："我无法跟上帝联系。"在场的希尔伯特直接了当地对布劳威说："按照你的方法，现代数学的大部分成果都要被抛弃，但对于我来说，重要的不是抛弃，而是要获得更多的成果。"[3]希尔伯特的话赢得全场热烈的掌声。1927年，希尔伯特访问汉堡，作了一次关于数学基础讨论情况的报告。在报告中，他强调形式主义计划不仅具有数学价值，而且具有重要的普遍的哲学意义。同时，他对直觉主义派和逻辑主义派的观点进行了尖锐的批评。他说："为了奠定数学的基础，我们不需要克隆尼克的上帝，也不需要彭加勒的与数学归纳原理相应的特殊悟性能力，或布劳威的基本直觉；最后，我们也不需要罗素和怀特海关于无限性、归约性以及完备性的公理……"。[4]

三个学派之间的论战是如此激烈，以至有时竟发展到超出学术论争的范围，而带有某种感情上的对立，甚至人身攻击。布劳威公开把希尔伯特说成是"我的敌人"，有一次，他与朋友范·德·瓦尔登到另一个朋友家作客，席间，当范·德·瓦尔登讲到希尔伯特，并用朋友相称时，布劳威竟愤然起身，拂袖而去。

数学的可靠基础究竟是什么？三派都没有能够给出正确

---

1)、2)M.克莱因：《古今数学思想》第四册，上海科学技术出版社，1981年，第317页。

3) 康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年，第231页。

4) 同上，第234页。

的解答。其根本原因就在于思想的片面性。他们各自从不同的方面分析数学的某一特征，都忽略了数学的整体性，并把这一特征加以夸大和绝对化：逻辑主义派过分强调数学同逻辑的联系，直觉主义派过分强调直觉思维的明显性，形式主义派过分强调形式的严格性。

近几十年来，在法国数学界又形成了一个新的学派——布尔巴基学派。这个学派把数学看成是关于结构的科学，并用结构的观点来解释数学的基础问题。它认为最普遍、最基本的数学结构有三类：代数结构、顺序结构和拓扑结构，并把这三类结构称为母结构。在他们看来，整个数学大厦就是以这些结构为基础建立起来的。布尔巴基学派结构的观点，为数学研究提供了有力的工具，但它也存在形式主义的东西。它能够正确地解释数学基础的许多重要问题，然而也有许多问题是说明不了的。因此，数学的可靠基础究竟是什么？目前仍是数学界认真探讨的一个重要课题。

不同学派及其观点的争论，是数学发展过程中的正常的现象。过去存在，现在存在，将来还会存在下去。从这个意义上说，一部数学史也就是一部诸子百家的争鸣史。

历史表明，争论在数学研究中占有特殊的地位，是促进数学发展的重要力量。

首先，通过争论，可以促进数学新概念由不明晰发展到较为明晰，数学新理论由不完善发展到较为完善。例如，无理数、负数、虚数以及无穷小等重要概念，就是在不同见解的争论中逐渐明晰、确立起来的。同样，解析几何、微积分、非欧几何、勒贝勒积分等重要数学理论，也都是在争论中逐渐完善起来的。而新兴的现代数学学科非标准分析、模糊数学和突变理论等，今天正在争论的推动下不断发展着。

其次，通过争论，可以激发新的数学思想、产生新的数学

问题。事实上，在争论过程中，为了论证自己，批驳对方，双方都将积极地、深入地进行思考。这就容易产生新的思想。同时，为了难倒对方，还要主动地给对方设置疑难，由此往往能够提出具有重大价值的数学问题。例如，在数学基础问题的争论中，逻辑主义派、直觉主义派和形式主义派虽然都没能实现自己的计划，但它们在论证自己观点的过程中，却不同程度地都提出了一些有价值的思想，其中有的甚至发展成一门理论。特别是逻辑主义的类型论、直觉主义的能行性理论、形式主义的证明论，对数理逻辑和电子计算机的发展有着积极的作用。

第三，通过争论，能够及时发现和有效地培养人才。在数学史上，有不少著名数学家是在争论中被辨识出来的。我国著名数学家华罗庚(1910—1985)，于1930年在上海《科学》杂志发表题为《苏家驹之代数五次方程式解法不能成立的理由》的论文，清华大学熊庆来(1893—1969)教授，正是从这篇敢于同著名数学家争鸣的文章中，及时发现了他的数学才能，并引导他进而走上数学探索的道路。

历史还表明，数学中不同观点、学派之间的分歧，应当通过自由讨论去解决，而不应当采取简单的方法去处理。任何强行压制一种观点，随意取消一个学派的作法，都会堵塞数学健康发展的道路。毛泽东同志指出："百花齐放、百家争鸣的方针，是促进艺术发展和科学进步的方针。"[1] 数学发展史的大量事实证明了这一论断的正确性。认真贯彻百花齐放，百家争鸣的方针，对于发展我国的数学事业，具有极为重要的意义。

1) 《毛泽东选集》第五卷，人民出版社，1977年，第388页。

第八章 数学蒙难

数学的发展具有曲折性，数学蒙难是这种曲折性的一个重要表现。所谓数学蒙难，就是指在数学发展的进程中，由于种种因素，使某些数学成果在发现或公认时间上被延迟，在传播的空间上受限制，以及使发明者本人遭遇不幸等现象。这里仅就数学蒙难的原因，作以初步的分析。

纵观数学发展的历史，数学蒙难这种现象是经常发生的。对每一个蒙难事件来说，都是在特定的历史条件下出现的特殊现象，发生的原因是多方面的，也是十分复杂的，但其中却存在着带有普遍性的一些原因，概括起来，主要有以下几点。

一、传统观念的束缚

数学发展过程中所出现的新理论或新发现，有时与原有的理论相矛盾，与旧有的传统观念相抵触，所以，固守于原有的理论和旧有的传统观念，必然阻碍数学新成果的确立、公认和传播，导致数学蒙难。事实上，原有的数学理论和数学观念，往往是人们在长期实践中逐步形成的，曾有效地解决许多实际问题，但是，如果把它们看成是僵死的、不可逾越的、绝对不变的，那就会影响数学发现的进程，阻碍数学的发展。勒贝格积分提出和确认的历史过程，就深刻地说明了这一点。

十九世纪中叶，德国数学家黎曼(G. F. B. Riemann, 1826—1866)创立了黎曼积分。这种积分在力学和物理学中有着重要作用，在相当长的时间里，人们一直认为黎曼积分是完

美无缺的了。可是黎曼积分只适用于连续函数或间断点不多的函数,对积分与极限交换次序的问题,条件要求太苛刻。到了十九世纪末二十世纪初,许多领域特别是近代物理学的发展,要求拓广可积函数类,减弱积分与极限交换次序的条件。适应这种需要,法国数学家勒贝格,在前人工作的基础上,对传统的黎曼积分进行了改造。他以函数值相近的区集分划代替求积区间从左至右的分划,以集合"测度"的一般理论代替粗糙的"广延"理论,于1902年发表《积分,比度,面积》一文,提出新的点集的测度概念,并在此基础上建立了一种适应范围更广的新型积分,即勒贝格积分。接着,勒贝格又于1903年发表另一篇论文,讨论和阐述了勒贝格积分在富立叶级数理论中的应用。1904年,他又出版了《积分与原函数的研究》一书,进一步发展了勒贝格积分的研究成果。这样,勒贝格便解决了大数学家波雷尔、约当(C.Jordan,1838—1922)等人长期想解决而一直未解决的问题。但是,当时的一些数学家受传统的黎曼积分的束缚,不仅不愿接受新产生的勒贝格积分,而且指责它破坏了黎曼积分的完美性,甚至表示厌恶,予以抵制。数学家爱米特(C.Hermilte,1822—1901)在给斯蒂吉斯的信中谈到勒贝格积分时说:"我怀着惊恐的心情对不可导函数的令人痛惜的祸害感到厌恶"。[1]像彭加勒这样的大数学家也曾对勒贝格积分进行过歪曲和讽刺。勒贝格遭到了数学界的冷遇、嘲笑和攻击。正如后来勒贝格在《工作介绍》一书中回顾当时情景时所指出的那样:"对许多数学家来说,我成了没有导数的函数的人,虽然我在任何时候也不曾完全让我自己去研究或思考这种函数。因为爱米特表现出来的恐惧和厌恶差不多每个人都会感到,所以任何时候,只要当我试图加入一个数学讨论时,总会有些分析学者说:'这不会使你感兴趣的,

1) M.克莱因:《古今数学思想》第四册,上海科学技术出版社,1981年版,第34页。

我们是在讨论有导数的函数'，或者，一位几何学家就会用他的语言说：'我们是在讨论有切平面的曲面'。"[1]由于传统观念的极力排斥和阻碍，勒贝格积分在二十世纪的头十年里，一直未能得到数学界的公认。直到1910年，由于勒贝格、斯蒂吉斯等人的进一步研究，特别是把勒贝格积分应用于概率论、谱理论、调和分析等领域，并从而形成了以勒贝格测度和勒贝格积分为基础的一个新的数学分支——实变函数论，为近代物理学提供了十分有效的数学工具，勒贝格积分才得到了数学界的公认。正是由于勒贝格的突出贡献，1922年他被选为巴黎科学院院士，1924年成为伦敦数学会名誉会员，1931年成为英国皇家学会成员，并被聘为苏联科学院通讯院士。

非欧几何创立的曲折历程，也是传统观念导致数学蒙难的又一生动例证。我们知道，十九世纪二十年代，德国的高斯、俄国的罗巴切夫斯基和匈牙利的亚·鲍耶这三位数学家，在总结两千多年来试证欧氏第五公设失败教训的基础上，几乎同时提出并证明了与"欧氏第五公设是可证的"这一原论题完全相反的新论题"欧氏第五公设是不可证的"。他们巧妙地运用反证法，不仅证明了新的论题，而且还获得了一系列新的成果，即非欧几何理论。然而，这些新理论提出之后，却遭到了传统观念的百般阻挠，掩延了它公认的时间，影响了它的传播范围。事实上，高斯早在1792年就萌发了非欧几何的思想，1817年便独自获得了关于非欧几何的一系列重要研究成果，并把这些成果写在他的日记上和与朋友的书信中。但是，由于他屈服于传统观念的压力，深怕引起"愚人的叫喊"，损害其"欧洲数学之王"的称誉，终生未敢发表这些成果。1826年2月23日，罗巴切夫斯基在喀山大学物理数学系学术会议上

1） 转引自克莱因：《古今数学思想》第四册，上海科技出版社，1981年版，第130—131页。

宣读了他的第一篇关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》。这是一篇具有独创性的论文，它的问世标志着非欧几何的诞生。可是，这一新成果却遭到了正统派数学家的冷漠和反对。在罗巴切夫斯基所提出的"离奇古怪"命题面前，一些数学权威开始感到吃惊，接着表示反对，然后就是歪曲和攻击。系学术委员会委托数学家西蒙诺夫、古普费尔和博拉斯曼组成鉴定小组，要求对罗巴切夫斯基的这篇论文作出书面评定。然而，他们不仅迟迟写不出书面评定意见，而且连论文的原稿也给遗失了。1829年，罗巴切夫斯基已被任命为喀山大学校长。这一年他又写出了一篇进一步阐发他的非欧几何思想的学术论文《几何学原理》，并发表在《喀山大学通报》上。1832年，根据罗巴切夫斯基的请求，喀山大学学术委员会把这篇论文呈交彼得堡科学院进行鉴定。科学院委托当时的数学权威奥斯特罗格拉得斯基(М.В.Остроградский, 1801—1862)院士写出书面审查意见。这位院士对罗巴切夫斯基的这一研究成果，不但未予肯定，反而极尽歪曲、非难和诽谤之能事。同年11月7日，奥斯特罗格拉得斯基在科学院的鉴定书中一开头就写道："看来，作者旨在写出一部使人不能理解的著作。他达到了自己的目的。……由此我得出结论，罗巴切夫斯基校长的这部著作谬误连篇，叙述混乱，因此不值得科学院注意。"[1]罗巴切夫斯基的这篇论文不仅在科学院遭到了激烈反对，而且在社会上也引起了敌对的叫嚣。1834年，布拉切克和捷列内这两个人，以匿名C.C.在《祖国之子》杂志上发表题为《评罗巴切夫斯基的著名〈几何学原理〉》的文章，公开对罗巴切夫斯基进行攻击，文章一开始就写道：

---

1) Л.Б.Модзалевский, Материалы Для биографии, Н.И. Лобачевского, М.—Л.1948, стр. 334.

"甚至难以理解，罗巴切夫斯基先生是如何用数学中最简明的几何学建立起晦涩的、不可思议和神秘莫测的学说的。"[1]接着讽刺地说："为什么不能把黑的想像成白的，把圆的想像成方的，把三角形内角和想像成小于两直角，把同一个定积分值想像成既等于$\pi/4$，又等于∞？非常非常可能，尽管理智是不能理解到这些的。"[2]文章结尾时，更为放肆地嘲弄道："为什么不把标题《几何学原理》写成例如'对几何学的讽刺'，'几何学漫画'呢？！"[3]针对这篇匿名文章，罗巴切夫斯基写了一篇反驳的文章，并投给《祖国之子》杂志，但该杂志以"维护杂志声誉"为理由，拒绝发表。

高斯对罗巴切夫斯基关于非欧几何的研究成果态度如何呢？当高斯看到罗巴切夫斯基于1840年发表的非欧几何论著《平行线理论的几何研究》(德文版)后，他虽然在私下朋友面前表示赞许，甚至高度评价罗巴切夫斯基是"俄国最卓越的数学家之一"，并下决心学好俄语以便直接研读罗巴切夫斯基的原著。但是，他却一直不敢对罗巴切夫斯基进行公开评论，也不准他的朋友泄露他关于罗巴切夫斯基的看法。他积极推选罗巴切夫斯基为哥廷根皇家科学院通讯院士，但在评选会上以及由他亲笔写给罗巴切夫斯基的推选通知书中，却避而不谈罗巴切夫斯基在非欧几何方面的贡献。高斯这样做，显然与他受传统观念的严重束缚是分不开的。

同罗巴切夫斯基一样，非欧几何的另一位创立者亚·鲍耶也遭到传统观念的阻碍。亚·鲍耶的父亲法·鲍耶是一位著名的数学家，是高斯大学时代的同学和挚友。早在大学时就开始试证欧氏第五公设，花费了极大精力，但一直未获成功。1817年，亚·鲍耶在维也纳工程学院读书时，由于受他父

1)、2) 同上页，第358页。

3) 同上，第362页。

亲的影响，开始埋头于欧氏第五公设的试证工作。当法·鲍耶得知这一消息时，非常不安。由于试证欧氏第五公设的失败，使法·鲍耶变得十分保守。他认定任何人在这个问题上都不会取得任何结果，于是极力反对他的儿子从事这个问题的研究。父亲的阻拦并没有使亚·鲍耶放弃对欧氏第五公设问题的研究。1820年，亚·鲍耶开始提出并论证"欧氏第五公设是不可证的"这一新命题。1822年，获得了许多重要成果，并于同年11月23日写信给他父亲法·鲍耶说："我已从乌有创造了另一个新奇的世界。"[1]1825年，他基本上完成了非欧几何的创立工作，并写成论文。1826年，他把论文送交给维也纳工程学院的老师艾克维尔教授审阅。可惜的是这位教授不仅看不懂，而且连文稿都给弄丢了。1832年，他又将用马加尔文写成的原论文翻译成拉丁文，并以《附录》的形式发表在法·鲍耶的初等数学书《试验》第一卷的末尾。在发表这一论文时，法·鲍耶提出要亚·鲍耶自己承担印刷费，这个条件对于薪金甚少的亚·鲍耶来说确实是一个不小的压力。为了减少印刷费，他只好把自己的论文压缩到仅有24页的篇幅，结果文字叙述很少，大量的是抽象符号和各种奇异图形。正因为如此，后人读起来感到十分难懂，给这种新思想的传播造成障碍。

1832年《附录》出版后，在亚·鲍耶的一再请求下，法·鲍耶将此文寄给高斯，并请求他加以评论。高斯接到《附录》后，没有立即回信，过了一段时间才写了一封回信，信中说："我不应称赞它，……称赞它就意味着称赞我自己。因为，你儿子的这一工作，其全部内容、方法以及他所得到的结果，差不多与我在30—35年前已部分地得到的成果完全相同。"[2]亚·鲍耶

1）转引自梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980年版，第234页。

2） Б.В. Болгарский, Очерки по истории Математики, Минск, 1979, ctp, 256.

没有得到高斯的肯定，也没有得到数学界的重视，他心情沉重，极度痛苦，加上生活越来越困难，不久便患上了严重的忧郁症。1860年1月7日，亚·鲍耶因肺炎结束了他那充满穷困、忧伤和痛苦的一生。死后，他的遗体被送到无名公墓，而在教堂的死者登记薄上，竟有人在其生平介绍一栏中写了这样一句话："他的一生没有什么意义"。一个在数学研究上作出了具有划时代意义贡献的人，却得到这样的评价，这是极端不公平的。

二、数学权威的压制

数学权威是数学发展的必然产物，又是影响数学发展的重要因素。事实表明，数学权威不仅自己能够在数学研究上取得卓越的成果，而且还能够带领广大数学工作者进行新的探索，作出更大的贡献。数学权威是数学领域中极其宝贵的财富，在数学发展中占有特殊的地位，具有重要的作用。但是，作为一个数学权威，如果把权威绝对化，只看到自己的贡献，而看不到或贬低别人的成果，甚至采取学阀的作风，那么他就不仅不能在数学发展中充分发挥其学术带头人的作用，而且还会压制数学新发现、新成果，阻碍数学新生力量的迅速成长，从而造成数学蒙难。这样的事例在数学史上是不少见的。

十九世纪二十年代，挪威青年数学家阿贝尔，在椭圆函数理论的研究上取得巨大突破，得到了著名的阿贝尔基本定理等一系列重要成果，并将这些成果汇集成一篇论文：《论一类极广泛的超越函数的一般性质》。后来，他将这篇论文送交给法国巴黎科学院进行审查。该院院士、秘书，著名数学家傅立叶，只是草草地看了一下这篇论文的引言之后，便把它交给当时巴黎科学院院士、伦敦皇家学会会员、法国数学权威柯西和

勒让德进行审查。年轻的阿贝尔是多么渴望能得到数学权威们的肯定和支持，为了及时听到消息，他住在巴黎耐心地等待着。然而，他足足等了一年之久，也未得到任何回音。阿贝尔失望了。由于他心情焦躁、烦闷，加之刻薄的房东不仅收他高价的房租，而且还每天只供给他两顿饭，身体越来越不好。不久，他患了肺结核。这时身上的钱不多了，只好在别人的资助下，带病默默地离开了巴黎回到挪威。回国后也一直未得到巴黎审查的任何消息。他的病情日趋恶化，1829年4月6日，年仅27岁的杰出数学家阿贝尔，在饱尝数学权威们的冷遇，自己的重要研究成果受压制、被埋没的情况下，离开了人世。

那么，阿贝尔这篇重要论文的命运到底如何呢？在傅立叶的委托下，柯西把阿贝尔的论文带回家中，可是根本没有给予应有的重视，甚至论文放到什么地方竟记不起来了。直到两年之后，阿贝尔已经去世，被柯西弄丢了的这篇论文才重新找到。这里应当特别提到的是勒让德，他是当时法国数学界的老前辈，名符其实的数学权威，又长期从事有关椭圆函数理论方面的研究工作，积累了丰富的经验，本应对阿贝尔这位年轻人的新发现感到高兴，给予支持。然而，令人失望的是，他对阿贝尔的论文一直采取冷漠的态度，从未表示过肯定的意见。这是为什么呢？有人认为，这是由于阿贝尔触犯了勒让德的“世袭领域”，勒让德怀有对同行人的妒嫉之心所造成的。我们虽然对这种分析尚不能作出完全肯定的回答，但人们作出这样的推测也是有一定道理的。下述事实就是一个有力的说明。当勒让德把阿贝尔关于椭圆函数理论的研究工作告诉正在从事这方面研究并已取得许多成果的德国青年数学家雅可比(C.G.J.Jacobi，1804—1851)时，雅可比在认真阅读了阿贝尔的论文之后非常激动，为阿贝尔所做的重大发现感到无比高兴，与此同时，他又给巴黎科学院写信，十分气愤地指

责："阿贝尔先生作出了一个多么了不起的发现啊！有谁看到别的堪与比美的发现呢？然而，这项也许称得上我们世纪最伟大的数学发现，两年以前就托交给你们科学院了，却居然没有引起你们的注意，这究竟是怎么一回事呢？"而勒让德在复信中却借口说："我们感到论文简直无法阅读，因为它是用几乎白色的墨水写的，字母拼写得很糟糕，我们都认为应该要求作者提供一个较清楚的文本"。[1] 雅可比与勒让德两种截然不同的态度形成了鲜明的对照。真理是埋没不了的。1841年，也就是阿贝尔死后12年，被压制15年之久的阿贝尔关于椭圆函数理论的那篇论文，终于在雅可比的大力支持下公开发表了。阿贝尔在数学发展史上立下了不朽的丰碑。

同阿贝尔一样，才华出众的法国青年数学家伽罗华也屡遭数学权威的压制。伽罗华早在中学读书时就开始研究当时数学界最重大的数学难题之一——一般n次方程的求解问题，并在阿贝尔等人研究成果的基础上，利用群论的方法，从系统结构的整体上彻底地解决了这一难题。1829年，也就是伽罗华在中学学习的最后一年，他把自己的研究成果写成一批论文，并提交给法国巴黎科学院。当时科学院责成柯西对这些论文进行鉴定。1830年1月18日，柯西曾计划要对伽罗华的论文在科学院举行的一次意见听取会，但据柯西本人讲因他有病未能办到。可是，事隔一周以后，柯西向科学院宣读他自己的一篇论文，而对伽罗华的论文却一字未提。1830年2月，伽罗华又将他的研究成果写成一篇详细的论文，并直接寄给科学院秘书傅立叶。然而当年5月傅立叶就去世了，在其遗物中并未发现有伽罗华的文稿。1831年1月，伽罗华在寻求确定方程的可能性问题上又取得重大成果。他照样写成论文

1) E.T.Bell, Men of Mathematics, 1937, P.352.

提交给科学院审查。这篇论文是伽罗华关于群论研究的最重要的论著。当时法国另一位数学家泊松，虽然花费很大气力才看懂了这篇论文，并认定结果是正确的，但最后他还是建议科学院否定伽罗华的这一成果。就这样，伽罗华的极其重要的数学论文一次又一次地被压制、埋没下去了。1832 年 5 月 31 日，伽罗华由于参加决斗受重伤而离开了人间。在他生前，这些论文都没有公开发表。直到1846年，即伽罗华死后14年，法国著名数学家刘维尔(J. Liouville, 1809—1882) 把伽罗华的这些研究成果经整理后发表在他主编的《数学杂志》上。自此，伽罗华在数学上的重大贡献才逐渐为后人所了解。

权威压制造成数学蒙难，有时也表现在老师对学生研究成果的轻视、排斥、反对和攻击上面。十九世纪下半叶，德国青年数学家康托尔创立了集合论，在数学发展史上作出了巨大的贡献。然而，他的研究成果却遭到了一些数学权威的反对和攻击，其中表现最为突出的就是他的老师克隆尼克。在康托尔还在柏林大学学习时，克隆尼克就在该校任教并已成为赫赫有名的数学家了。克隆尼克对一切与他意见不一致的数学家，不仅表现轻视和排斥，而且还常常进行公开的反对和攻击。当然，对待作为他学生的康托尔也毫不例外。当克隆尼克发现康托尔关于集合论的研究成果与他的主张相矛盾时，便对康托尔进行了激烈的攻击。克隆尼克把康托尔关于超限数的研究说成是一种非常危险的"数学疯病"，并在多种场合下，用极其刻薄的语言，无情地攻击康托尔长达十年之久。康托尔一直在哈雷大学任教，薪金很少，多次想在柏林找到一个收入较多，地位较高的教授职位，但由于克隆尼克的反对和阻拦，一直未能实现。康托尔的学术论文，也就是在克隆尼克的压制下一再延误发表的日期。在克隆尼克激烈而持久的攻击下，康托尔在精神上受到极大损伤，极端消沉，精神不

振。由于这种病经常发作，康托尔健康状况逐渐恶化，不时被送到精神病院去进行治疗。一直到1918年，康托尔终于被精神病夺去了生命，逝世在哈雷大学附属精神病院里。像康托尔这样一位杰出的数学家，竟在数学权威的压制、攻击下变成了一名精神病患者，这在数学发展史上是罕见的，发人深省！

三、错误哲学思想的影响

错误哲学思想的影响，是导致数学蒙难的另一个重要因素。从社会上，这种影响表现为错误哲学思潮的冲击。比如，宗教神学是整个中世纪占统治地位的一种错误哲学思潮，它对十六、七世纪数学的影响也是十分严重的。事实上，这种哲学思潮不仅使数学神秘化，阻碍数学的发展，而且还束缚着一些数学家，甚至将他们引向歧途。法国数学家帕斯卡，16岁时就参加了作为巴黎科学院前身的巴黎数学家和物理学家小组的活动。他在数学研究上取得了一系列重大成果。他建立了关于射影几何的帕斯卡定理；发现了二项式展开的系数规律，与费尔马共同奠定了概率论的基础，并创造了许多解法；提出了求不同曲线形面积和重心的一般方法；设计和制造了二进制算术运算的计算器等。此外，他在物理学方面也有许多贡献。但是由于受宗教神学世界观的严重影响，他自幼就相信神学，并力图将宗教信仰与数学的理性主义调和起来。后来他逐渐与数学研究疏远，甚至厌烦起来，而对神学教条却深信不疑。他象一个苦行僧似的，一旦发现自己产生什么对宗教神学不虔诚的“邪念”时，马上就用腰带刺痛自己的肉体。长期精神和肉体的折磨，不仅极大地妨碍了他数学才能的发挥，断送了他在科学上的光辉前程，而且搞垮了自己的身体，致使他在不满三十九岁时便离开了人间。

印度青年数学家拉玛努真（S.Ramanujun, 1889—1920），有很高的数学才能，在他 24 岁时就在《印度数学会周刊》上发表了第一篇论文：《关于伯努里数的一些性质》，引起了印度数学界的重视。1913年，他在给英国著名数学家哈代（G.H.Hardy, 1877—1947）的一封信中对一百二十个自称是独立发现的定理请求审阅。哈代看后非常惊讶，因为其中有些定理是过去一些大数学家发表过的，由于这些定理是用法文和德文写成的，作为身居印度偏僻地区的拉玛努真来说是不可能看过的；也有些是难度相当大的，过去未见任何人解决过。后来，哈代主动邀请拉玛努真去英国著名的剑桥大学从事数学研究。但是，由于受婆罗门教教规和母亲的反对，身为婆罗门教徒的拉玛努真没有接受这次邀请。不久，哈代又一次发出邀请，他欣然接受了。他于1914—1917年，在剑桥大学专门从事数学研究期间，在哈代等人的指导下，发表了二十一篇重要数学论文。他在素数分布理论，广义双曲几何级数、连分数、发散级数、积分学和椭圆函数和解析函数论等方面，都发表了具有创造性的研究成果。在数学界引起了轰动。1918年，他被选为伦敦皇家学会会员、特里尼德学院的研究员，从而成为著名的数学家。然而，他是一个虔诚的婆罗门教徒，一方面受教规的束缚未能尽早地远离落后的家乡到条件优越的异国去深造，另一方面，他忠实地执行婆罗门教的素食主义。在剑桥大学期间，只能自己起灶，食物营养不全，再加上工作起来废寝忘食，身体逐渐虚弱。后来，他又害上了当时无法医治的肺病，不得不停止他的数学研究。1919年，他回到印度马德拉斯，1920年病逝。

恩格斯指出，“不管自然科学家采取什么样的态度，他们还是得受哲学的支配。问题只在于：他们是愿意受某种坏的时髦哲学的支配，还是愿意受一种建立在通晓思维历史和成

护的基础上的理论思维的支配。"[1]帕斯卡，拉玛努真等著名数学家，正是由于受当时盛行的维心主义和形而上学这种坏的时髦哲学的支配，结果使他们延缓了作出成果的速度，阻碍了继续作出更大的贡献，进而损害了自己的身体，导致数学蒙难。这些历史教训，值得认真汲取。

以上从三个方面分析了数学蒙难的原因。从数学发展史上看，导致数学蒙难的原因还有诸如习惯势力的阻挠、反动阶级的扼杀、管理方法的不当、认识水平的限制，嫉妒思想的干扰，争名夺利的诋毁，自然灾害的袭击等等。

分析和研究数学蒙难的目的是为了从历史中汲取教训，采取积极措施，最大限度地防止和避免数学蒙难现象的发生，以推动数学科学健康发展。那么，怎样才能更好地防止、避免数学蒙难呢？

首先，要防止、避免数学蒙难，就要极大地提高全民族科学文化水平，打破旧的传统观念，树立发展的观点。一项数学新成果问世之后，能否及时地被接受，除了本身可能尚存不足之处以外，主要取决于客观外界条件，而整个社会的数学水平和鉴别能力以及能否打破旧的传统理论、观念的束缚，用发展的观点观察和分析问题，是其中一个重要方面。一个已取得的数学理论，或已形成的数学观念，它在过去数学发展中起到积极作用，是数学进步的标志，不仅如此，它还是数学继续发展的重要基础 但是，如果我们把它绝对化，认为是数学的"顶峰"，并以以来排斥和否定数学新成果，那就会给数学的发展造成阻碍，延缓数学前进的步伐。因此，我们一定要采取积极措施，迅速发展全民族的数学水平，树立马克思主义科学发展观，及时识别，热情扶植数学中的新事物，为它们的进一步

1）《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第187页。

发展开拓道路。

其次，要防止、避免数学蒙难，也要提高数学科学管理水平，提倡伯乐精神。对一个数学新成果，要求数学界每一个人都能及时识别它是不可能的，要求每位数学权威都支持它，而不压制它，也是不容易做到的。但我们可以采取科学的管理方法和强有力的措施，尽量提高识别的速度、加速公认、传播和应用推广的进程。比如，我们可以建立数学新成果评审组织，集中多方面的意见，尽早作出公正的审定结论。又比如，我们也可以建立数学奖惩制度，对那些热心扶植数学新事物，甘作人梯，充分发挥伯乐精神的人给予奖励；对那些有意压制数学新成果，打击数学新生力量，并造成数学蒙难的人，要给予应有的教育和惩罚。不仅如此，我们还要为那些在数学上作出突出贡献的中青年数学家创造更好的生活、学习和工作的条件，提高他们的社会地位，以充分发挥他们的数学才能，做出更多成果。

第三，要防止、避免数学蒙难，还要加强马克思主义哲学的学习与研究，树立科学的世界观。马克思主义哲学是关于自然界、社会和思维的一般规律的科学。它既是人们认识自然，改造自然，发展自然科学的强大思想武器，又是推动数学科学不断前进的最重要的指导思想。历史告诉我们，一个数学家如果没有正确的哲学思想作指导，不仅影响在数学研究上作出更大贡献，而且还可能成为“最坏哲学的奴隶”，丧失从事数学研究的能力。像前面讲到的巴斯卡、拉玛努真，不就是因为受到唯心主义的严重束缚才从一个杰出的青年数学家逐渐演变成一个宗教神学的虔诚信徒，最后损害了身体，终止了自己数学研究光辉前程的吗？我们一定要认真学习和研究马克思主义哲学，树立科学的世界观，为迅速发展数学科学事业做出应有的贡献。

总之，数学蒙难是数学发展史中一种常见的现象，造成这种现象的原因是多种多样的，有社会方面的，有数学领域方面的，也有数学工作者个人方面的。只要我们注意研究这些现象产生和演变的规律，认真吸取历史的教训，不断总结现实的经验，采取强有力的措施，数学蒙难的现象就可以逐渐减少和避免，以保证数学事业顺利发展。

第九章　数学伯乐精神

数学人才的发现和培养，是决定数学发展的根本性因素，而是否具有数学伯乐精神，又是能否及时发现和认真培养数学人才的一个重要条件。因此，大力提倡和广泛宣传数学伯乐精神，对推动数学的迅速前进必然有着积极作用。那么，数学伯乐精神的具体表现是什么？它的积极作用又主要体现在哪里？下面就这些问题，结合数学史上的事例，作以初步的分析。

一、善于发现和扶植有才华的数学新秀

人的才能、智力的发展是不平衡的，它们不仅在高低上有区别，而且在表现的方面也有所不同。例如，有的善长于文学创作，有的造就于音乐、美术，有的富有技术发明本领，有的具有深邃的数学直觉力，等等。一个人在才能、智力上的高低以及表现的方面，往往在青少年时代就有所表露。如果此时遇到优秀的教师或指导者，使其才能、智力得以及时肯定和强化，那么，他的才能和智力就有可能得到充分的发挥，并在未来的工作中取得更显著的成就；相反，如果得不到应有的支持，受到压抑，那么这个人的才能和智力就会被束缚起来，甚至会被默默地扼杀掉。数学史表明，许多人之所以后来成为杰出的数学家，是和他们在青少年时代有幸得到远见卓识者的培养分不开的。

近代数学的奠基人之一、德国数学家高斯，在10岁读小学的时候，有一次数学教师布特纳（Büttner）让学生计算数目

1到100的和。刚布置完题目，高斯就把演算的石板交了上来，而过了很久，别的学生才相继交上石板。当布特纳发现只有高斯一人的答案是正确的，而且运用了他还没有教过的计算等差数列的方法时，十分惊奇，立刻意识到这是一名难得的、很有数学才能的学生。为了培养高斯，布特纳买了当时一本最先进的算术书送给他研读，还特意安排助手巴特尔斯(J. M. Bartels, 1769－1836)伴陪高斯一起学习。高斯在布特纳、巴特尔斯的帮助下，数学才华逐渐显示出来，后来在一个公爵的资助下，终于进入哥廷根大学攻读数学，从此踏上了数学探索的道路。

挪威数学家阿贝尔幼年丧父，生活贫困。他从小酷爱数学，上中学时被同学们称为“数学迷”。他的老师洪保(B. M. Holmboë, 1795－1850)发现阿贝尔不仅喜爱数学，而且对数学问题有机敏的思维和异乎寻常的洞察力，于是对他格外注意起来，并给予特殊的辅导。在洪保亲自指导下，阿贝尔很快地自学完了许多当代的数学名著。洪保还预言，阿贝尔不久就会成为一名优秀的数学家。不仅如此，他还帮助阿贝尔选定研究课题：历史上有名的五次方程的解法问题。正是对这一问题的成功解决，使阿贝尔后来成为群论的创始人之一。阿贝尔一生中多次得到洪保的帮助，包括资助他到欧洲大陆去留学、求职。1839年，即阿贝尔去世后十年，洪保还为他校订出版了论文集。

法国巴黎路易勒格朗公立中学的数学教师里沙(L. P. E. Richard, 1795－1849)，也是数学史上以伯乐精神著称的人物。他利用业余时间坚持到巴黎大学听课，完全有能力从事数学研究和著作，可是，他却把全部精力和心血倾注在学生身上。他不仅乐于把当代数学的新思想深入浅出地介绍给学生，鼓励他们将来攀登数学的高峰，而且善于发现和培养学生

中的那些出类拔萃者。十九世纪法国有好几个杰出的数学家在青年时代都曾得益于他的教诲。群论的创始人伽罗华就是其中的一个。伽罗华生于巴黎附近一个叫布拉伦的小村子里，小学课程是在母亲辅导下完成的。1823年，12岁的伽罗华进入路易勒格朗中学。在当时拉丁语和希腊语最受重视，而数学只是一门选修课。伽罗华很快就对拉丁语和希腊语失去了兴趣，转而去听数学课。为此，他的拉丁语和希腊语弄得不及格，可对数学却逐渐着了迷。他自学了法国著名数学家勒让德的几何著作，而后又阅读了许多代数学和解析几何的著作。课堂上按步就班的教学已经越来越满足不了他的求知欲望。1828年，他进入特别数学班，在这里遇到教师里沙。里沙十分欣赏伽罗华的才能，称他为"法国的阿贝尔"。他还向伽罗华推荐许多课外读物，其中包括阿贝尔的1826年关于代数方程论的著作。在里沙的指导和鼓励下，伽罗华着手研究有关代数方程论的问题。1829年，也就是在伽罗华遇到里沙的第二年，在里沙的指导下，伽罗华完成了一篇整数论的论文，接着完成了关于代数方程论的论文，这后一篇论文彻底解决了代数方程可解的充要条件，并从中开创出代数学的一个崭新领域——群论。

事实表明，中、小学教师的伯乐精神是值得赞誉的。他们虽然由于种种原因在科学发现上难以取得重大成果，但在人才的发现和培养上却常常作出重大贡献。

在数学史上，著名数学家及时发现和精心栽培青少年的典型事例，也是多不胜数的。比如，法兰西学院数学教授、法国科学院院士刘维尔发现和培养爱米特就是一例。刘维尔在科学上对超越函数理论有过显著的贡献，在教育上是一位杰出的教师，他的许多学生都成为有成就的数学家。他是青年人的热心指导者，总是乐于在他们开始工作的时候及时地指导

和帮助他们。例如，1843年，他以偶然的机会结识了法国多科工艺学校的学生爱米特，几次接触后就认定这位有良好数学素质的青年人很适合从事数学研究工作。于是热心鼓励和支持他攻读数学，还指给他未来研究的方向。在刘维尔的指导下，爱米特的数学才能很快地得到发挥。可是，爱米特有一个弱点，每当遇到不顺心的事情时情绪容易发生波动，甚至影响学业提高。对此，刘维尔总是及时地去信振奋他的精神。受刘维尔的影响，爱米特果然在椭圆函数论等方面取得一连串的重大成果，成为数学史上的一个著名数学家。

又比如，德国明斯特哲学院教授古德曼(C.Gudermann，1798－1852)发现和培养魏尔斯特拉斯。魏尔斯特拉斯生于普鲁士的一个小职员家庭。从小喜爱数学。可是父亲偏偏想把自己的儿子培养成一个高级文官。当魏尔斯特拉斯19岁时，父亲把他送进波恩大学去学法律。但在大学学习期间，他却违背父亲的意愿，立志献身于数学。他常常不去听课而在宿舍里一个人研读拉普拉斯的《天体力学》和雅可比的《椭圆函数论初步》等名著。大学毕业时，他没有取得法律博士学位。这使他的父亲非常失望，于是决定送他进明斯特市神学与哲学院学习，准备让他当一名教师。在那里，他遇见了古德曼教授。古德曼发现魏尔斯特拉斯的数学才能后，便立即吸收他来听自己开设的数学讨论班，并亲自指导他完成一个研究题目：把椭圆函数表示成幂级数的商的形式。这项成果在当时没能引起一般人的重视，可是古德曼却认为它的价值很高，是椭圆函数理论的一个重要发现，其意义可以同这门理论已有的任何一项成果相提并论。1841年，魏尔斯特拉斯到中学当教师，他教的课程很多：数学、物理、历史、地理、语文、德语以及体育等。他从来没有因工作繁忙而间断对数学的研究。他经常废寝忘食地钻研数学，有一次竟然为解决一道难题通宵未眠，忘

记了上早晨八点钟的课。在这期间，古德曼一直没有停止过对魏尔斯特拉斯的鼓励和指导。经过十四年长期不懈的势力，魏尔斯特拉斯终于以他的突破性研究成果被数学界所注意。哥尼斯堡大学首先授予他名誉博士学位。由于数学家库麦尔的推荐，1856年被聘为柏林大学副教授。1864年又被提升为正教授。1868年被选为法国科学院院士。

再比如，德国杰出的数学家希尔伯特为犹太旁听生雅可布·格罗美争取博士学位权。雅可布·格罗美本来对数学感兴趣，但由于家境贫寒，不得不进入一所培养教士和法官的犹太法典学校。毕业后得到作一名教士的机会，可是，按照他所在地区的风俗习惯，要想成为一名教士，必须跟原来老教士的女儿结婚才行。然而，这位老教士的女儿却嫌弃格罗美因患有肢端肥大症而造成的手脚畸形，不肯和他结婚。格罗美一气之下放弃了当教士的念头，转而发愤攻读数学。1912年，他以旁听生的资格参加了希尔伯特的数学讨论班。他通过希尔伯特的助手奥托·陶普列茨，转交给希尔伯特一篇论文，请他审阅指导。希尔伯特见到论文，一眼便看出作者有着不凡的才能。因为凭他多年的经验，一般说来，一篇博士论文只需在一处有独到的思想就可通过，而这篇论文却在两处有独到的思想。可是，格罗美由于没进过大学预科学校，没有预科学校的毕业文凭，却不具备当时规定的接受博士学位的条件。

为了不使这位犹太旁听生的数学才华遭到埋没，希尔伯特决心为他争取到博士学位。他对自己的助手说："如果我能为这个没有预科学校文凭的、年轻的立陶宛犹太人争取到博士学位，那可真是做了件有意义的事情！"[1] 在学位资格评审会上，格罗美的学位申请果真遭到教授们的否定，其唯一理由

1） 康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年，第164页。

是论文的作者没有预科学校的毕业文凭。对此，希尔伯特与他们展开激烈的辩论。他直截了当地说："如果没有预科毕业文凭的学生都能写出象格罗美这样的论文，那就必须做一条规定，禁止参加预科学校的毕业考试。"[1] 在希尔伯特的据理力争之下，教授们不得不作出让步，破例授给格罗美以博士学位。

希尔伯特对有才华的学生十分爱戴和珍惜，他曾经为一名优秀学生的早逝而悲痛万分。在哥廷根当时流传着这样一个感人的事件。有一次希尔伯特的一个学生交给他一篇证明黎曼猜想的论文。作者虽然没成功地证得黎曼猜想，但论证的方法却很新颖、巧妙，以至希尔伯特费了不少精力才发现其中的错误。希尔伯特认为作者尽管没有达到目的，可是文章本身却包含着富有成果的思想萌芽，如果沿此路走下去，是有可能攻下这个著名难题的。于是，他鼓励这名学生继续探究下去。可是，过了一年，这名学生因患急病不幸去世了。希尔伯特对此心情十分沉痛，并亲自找到死者的双亲，要求允许他发表一个葬礼演说。在葬礼的那一天，他冒雨站在学生的墓前致悼词，对这名学生在他的才华尚未充分发挥之前就离开人世表示万分痛惜，并对他论文中的好的思想给予了充分的肯定。希尔伯特的演讲，使死者的家属和在场的学生无不为之感动。

二、敢于为逆境中的人才排忧解难

人才成长的道路往往是艰难曲折的。由于习惯势力的阻挠，传统观念的束缚，人才管理的不当，造成数学人才被压抑、

1） 康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年，第180页。

埋没甚至扼杀的现象，在历史上是屡见不鲜的。数学伯乐精神的一个重要表现，就是敢于打破各种阻碍人才成长的陈规，让受压抑的人才充分发挥才能，被埋没的人才重新回到数学活动的舞台。数学史上作为这方面的典型人物，希尔伯特和魏尔斯特拉斯“为人才开路”的感人事迹是值得称颂的。

德国数学家希尔伯特，不仅在发现和培养数学新秀方面作出重大贡献，而且在为处于逆境中的数学人才排扰解难方面也做得十分出色。他尊重、爱惜人才，主张在学术面前人人平等，坚决反对科学中一切局于国家、种族、出身和性别的偏见。1928年，在波隆那国际数学家代表会议的演说中，他明确指出：“应当看到，作为数学家，我们是站立在精确科学研究的高山之巅。除了义不容辞地担当起这个崇高的职责，我们别无其它选择。任何形式的限制，尤其是民族的限制，都是与数学的本质格格不入的。在科学研究中人为地制造民族的或种族的差异，是对科学极端无知的表现，其理由是不值一驳的。”又说：“数学不分种族……对于数学来说，整个文明世界就是一个国家。”[1]正是出自这种伟大学者的公正无私的精神，他为培养数学人才同各种保守势力进行了毫不妥协的斗争。

例如，他为才华出众的青年教师纳德·纳尔逊争取副教授职称，与教授们的偏见进行了顽强地斗争。纳德·纳尔逊原为柏林大学哲学系学生，取得博士学位后来到哥廷根大学任教。他博学多才，不仅精通哲学、逻辑学和伦理学，而且对哲学的科学基础和数学基础问题也很有研究。他性格开朗，好与人争论，在许多问题上有自己的独到见解。希尔伯特十分喜欢这位才华横溢的青年教师，常常约他在一起散步，共同探讨数学、哲学和逻辑学相交汇的知识领域。按当时的规定，

1） 康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年，第237页。

要想取得讲师资格，必须提交和通过晋升讲师的论文。可是，由于纳尔逊对一些问题的尖锐批评引起了哲学教授哈塞尔等人的不悦，因而他的晋级论文遭到教授会的无端非难。对此，纳尔逊十分恼火，但又毫无办法。有一天正当他在房间里闷闷不乐，不知如何是好时，希尔伯特突然亲自登门来访。他热情地邀请纳尔逊到家吃晚饭，并且为他精心安排如何去对付这些持有偏见的教授们。经过几番周折，在希尔伯特的支持和帮助下，纳尔逊的论文终于得到通过。几年之后，在晋升副教授的问题上，纳尔逊再次遭到哈塞尔等人的阻挠。这一次，希尔伯特亲自在教授会上同反对者相争，终又获得成功。在希尔伯特的档案袋里，有一份标有"纳尔逊事件"的材料，它详尽记载了当时希尔伯特为纳尔逊争取副教授资格的情况。在希尔伯特的关怀和影响下，纳尔逊很快成为第一流的哲学家，他所主编的一份哲学杂志，在当时颇有名声。

再如，希尔伯特为杰出女数学家艾米·诺德（E. Noether，1882－1935）登上大学讲台，与男尊女卑的习惯势力进行了不懈的斗争。艾米·诺德是爱尔朗根南德大学数学教授麦克斯·诺德的女儿。中学毕业后进入爱尔朗根大学攻读数学，开始以旁听生的资格听课，后来才得到正式的学籍。在那里得到她父亲的好友果尔丹教授的指导。1907年，在果尔丹的指导下完成博士论文《三元双二次型的不变量完备系》。1914年，第一次世界大战爆发后，她的家庭发生重大变化，父亲退休，母亲病故，弟弟被征从军。她不得不只身前往哥廷根谋求职业。这位年轻的女博士一到达哥廷根，希尔伯特就看出了她是女中的奇才，而且她在不变量理论方面的精深造诣正是哥廷根学派所需要的。于是，希尔伯特决定把这位女青年留在哥廷根大学任教。

在当时的德国社会，女性处于受歧视的地位，她们之中只

能有极少数人有机会享受高等教育，至于在大学里任教则是根本不允许的事情，因为社会上普遍存在一种“女人的头脑是低能的”偏见。哥廷根大学虽然曾在1874年授予柯瓦列夫斯卡娅（С.В.Ковалевская，1850—1891）以荣誉博士的学位，从而成为德国第一所准许给女性以博士学位的高等学府，但却没有女人上讲台的先例。为使诺德进入哥廷根大学任教，希尔伯特四处奔走，多方联系，在教授会上，他历数诺德的数学成果，要求批准她为哥廷根大学的第一名女讲师。他的提议当即引起激烈的争论。一些语言学和历史学教授反对得最为厉害，他们唯一的理由是，如果让一名女人当讲师，那她以后就会成为教授，成为大学评议会的成员，而这怎么能行呢？有的甚至露骨地指出，决不能让从战场上回到大学的士兵拜倒在女人的脚下读书。针对这种歧视女性的偏见，希尔伯特以尖锐的口吻批驳道：“我没有见过，候选人的性别竟成为反对她当一名大学教师的理由。我们毕竟是一所大学而不是一个洗澡堂。”[1] 尽管希尔伯特据理力争，但当时的顽固习惯势力仍占了上风。

为了保证诺德的生活和工作，希尔伯特想出一个办法。他以自己的名义开设一门课，但实际上由诺德来主讲。第一次世界大战结束建立了日耳曼共和国，妇女的社会地位稍有好转。经希尔伯特的再三提议，教授会终于作出让步，同意授予诺德以讲师职称。后来又授予她为“非正式的特别教授”。这是一个比普通教授地位低，并且没有固定薪金的头衔。此时，诺德已成为哥廷根数学学派中的一名学术带头人，她所主持的代数讨论班是当时哥廷根大学最富有创造性、成果最多的研究团体之一。看到这样一位杰出的女数学家得不到应有的重视和地位，希尔伯特心里十分难过。在一次教授会议上，他

1） 库克：《现代数学史》，内蒙古人民出版社，1982年，第27页。

愤愤不平地说:"在过去这几年,我们到底选进了几个有真才实学的人呢?"接着痛心地说:"等于零,等于零啊。"[1]

1933年,希特勒纳粹政权掀起狂热的反犹运动,出身犹太家庭的诺德也难逃厄运,被列为清洗的对象。为保护这位女数学家,富有正义感的希尔伯特不顾个人安危,联名上书给当时的教育部长,要求继续留用她。可是,一切努力全无济于事。诺德只好忍痛离开自己的祖国流居美国,到毛尔学院和普林斯顿高级研究所任教。1935年春,因病在那里去世。诺德的去世和其他许多犹太数学家的不幸遭遇,使希尔伯特在精神上受到沉重打击。在一次宴会上,当新任教育部长卢斯特问他:"现在哥廷根的数学怎么样?它已经完全摆脱了犹太人的影响!"他不无好气地顶撞道:"哥廷根的数学?确实,这儿什么都没有了。"[2] 希尔伯特为发现、培养和支持数学新生力量,作出了巨大贡献,是历史上著名的数学伯乐。

魏尔斯特拉斯以自身成才的经历,深深体会到学术名家的支持和鼓励对于青年人的成长是何等的重要。因此,他本人成名之后,每当遇到奋发向上、有志数学的青年,总是乐于给他们以帮助和指导。女数学家柯瓦列夫斯卡娅就是在他的帮助和指导下攀登到数学高峰的。1870年8月的一天,一位衣着朴素的女青年来到柏林大学魏尔斯特拉斯教授的办公室,急切地要求收她做学生。她就是冲破重重阻力,不远千里从俄国慕名来这里求学的柯瓦列夫斯卡娅。可是,在妇女受藐视的时代,柏林大学和其它大学一样,拒绝招收女性学生。柯瓦列夫斯卡娅以极为诚恳的态度向老教授表明,献身数学是她终生的愿望。魏尔斯特拉斯被她的科学热情所感动,决定出一堆难度较大的题目考考她再做决定。一周之后,柯瓦列

1) 康斯坦西·瑞德:《希尔伯特》,上海科学技术出版社,1982年,第209页。

2) 康斯坦西·瑞德:《希尔伯特》,上海科学技术出版社,1982年,第258页。

夫斯卡娅按期将做好的题目交上，他从答案中立即看出面前的这位女青年是一个难得的数学人才。于是下决心收留这位异国女青年做自己的学生。他找到学校当局，请求破例让这位女青年到他班上听课，学校当局坚决不答应。为了不使这株破土而出的数学新苗遭到夭折，他决定利用课外时间单独对她进行辅导。每到星期日的下午，他按时单独给柯瓦列夫斯卡娅讲课，除复述一遍本周内在课堂上讲的内容外，还向她介绍当代数学某些新的进展。经过魏尔斯特拉斯的精心辅导，柯瓦列夫斯卡娅四年之内不仅学完了大学的所有数学课程，而且完成了三篇重要论文。其中的第一篇论文成功地推广了柯西建立的一条重要定理。这定理后来被称为柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理。魏尔斯特拉斯决定向哥廷根大学推荐她为数学博士，并在推荐书中写道：在来自世界各国的学生中，没有人可以胜过柯瓦列夫斯卡娅女士的才能。由于她的论文远远超过了一般博士论文水平，哥廷根大学于1874年破例授予她"最高荣誉的哲学博士"，这使她成为历史上第一个数学方面的女博士。柯瓦列夫斯卡娅在后来的科学生涯中，一直得到这位德高望重的老教授的关怀。在老教授的建议和指导下，柯瓦列夫斯卡娅不久又成功地相继攻克了晶体中光线的折射和刚体绕定点转动等著名难题。后一研究成果使她荣获1888年法国科学院颁发的鲍廷奖金。看到自己精心栽培的学生解决了许多著名数学家长期没能解决的难题，已经白发苍苍的魏尔斯特拉斯感到无比兴奋和喜悦。他亲笔写信祝贺柯瓦列夫斯卡娅，赞誉她的工作必将使那些"权威人士"甘拜下风。

三、乐于提携后辈，主动让贤，甘当人梯

伯乐精神的另一个重要表现，就是欢迎后辈超过自己，并

主动创造各种有利条件，让奋发有为的青年尽快地成为学术活动舞台的主角，包括主动让出自己所担任的学术职务，甘当人梯。在数学史上，提携后辈、主动让贤、甘当人梯的事例是不少的。

其一，巴罗为栽培牛顿主动辞去卢卡斯讲座教授职务。1661年，牛顿考入著名的剑桥大学三一学院，他对数学和物理问题具有惊人的洞察力，很快就引起他的老师巴罗的注意。巴罗是当时三一学院的一位博学多才的教师，也是卢卡斯讲座的第一任教授。他发现牛顿不仅勤奋好学，而且有一种特殊的才能，特别是科学抽象能力和实验技能大大超过一般学生。为了把牛顿尽快地引导到科学研究的道路上，他让牛顿直接参加某些研究工作，并指出今后的努力方向。特别是他的“微分三角形”思想为牛顿后来建立微积分提供了重要启示。1665年牛顿毕业留校工作，三年后便成为主修课研究员。这时，巴罗坦然宣称牛顿的学识已经超过了自己，应当担任更重要的职务。可是，当时三一学院的数学教授只有一个名额，这就是卢卡斯讲座教授职位。为了让牛顿能够充分发挥自己的才能，1669年的10月，巴罗毅然辞去三一学院的职务，出走伦敦，亲自推荐牛顿任卢卡斯讲座教授。为赞颂巴罗的这种让贤精神，后人在三一学院牛顿的塑像之北，树立了巴罗的塑像。

其二，罗巴切夫斯基把研究室的领导职位让给他的学生、中学教师波波夫。喀山大学委员会曾通过决议，由于罗巴切夫斯基特殊的贡献，他的学术职务可以超过规定的期限。1846年，罗巴切夫斯基已经达到规定的30年的期限，他决定辞去数学教研室的教授和领导职务，让位给他的学生波波夫。他在给人民教育部的辞呈中写到：“去年获得博士学位的喀山第一中学教师波波夫，领导数学教研室的工作将会更有效益，他的

这种提升，不仅完全是应该的，而且是理所当然的，其目的是鼓励他做好今后的工作，发挥他显而易见的很好的才能。由于他还年轻，不象我那样为其他许多工作和家庭琐务而分神，他会迅速地表明自己是不愧为教授的，并将跻身于欧洲最著名的学者之间。在这种情况下，保留我教授职位的愿望不能认为是正确的。"[1] 这段话鲜明地表现出他乐于提携后辈、主动让贤、破格选拔人才的高尚品德。

其三，欧勒为使年轻的拉格朗日有机会发表自己的论文，有意识地推迟发表自己的研究成果。拉格朗日生于意大利的都灵。从小喜爱读数学书籍。曾就学于都灵炮兵学校，尚未毕业就担任了该校的数学课教学。当他19岁时受欧勒等人著作的影响对变分法方面的问题产生了兴趣，其中特别着重研究了历史上有名的等周问题和测地线问题。变分法是十八世纪数学研究的重要课题之一，欧勒在这个领域探索了30多年，有过突出的贡献。为取得名家的指教，拉格朗日同欧拉建立了长期的通信联系。欧勒也乐于同这位虽无名气但很有才华的青年人交往。欧勒不仅认真地同拉格朗日讨论变分法问题，而且常常把好的想法告诉给他。在欧勒的指导下，拉格朗日很快就得到许多重要的成果，这些成果博得欧勒的高度赞扬。其中有些成果欧勒早已得到，为了让拉格朗日的文章得以发表，使这位年轻人能在数学界早日赢得巨大的声誉，欧勒有意压下自己在这方面的文章暂不发表。不仅如此，欧勒还在自己的著作中引用和阐明拉格朗日的方法，使更多的人有机会了解他的工作。拉格朗日的工作不久便得到学术界的重视，当他23岁时，就被选为柏林科学院院士。30岁由欧勒推荐担任柏林科学院主席、物理数学所所长，成为当时欧洲少数享有盛

1） 鲍尔加尔斯基：《数学简史》，知识出版社，1981年版，第240页。

名的数学家之一。

科学中的伯乐精神，除了表现为某些远见卓识者个人对人才的珍惜和培养外，还表现为某些单位集体(包括学校、研究机构、学术刊物等)对人才的重视和栽培。巴黎科学院授予克雷洛院士称号就是研究机构破格选拔人才的一个典型例子。克雷洛在童年时代就表现出非凡的数学才能。12岁向巴黎科学院提出一篇关于四次代数曲线问题的报告；16岁时写出数学专著《双重曲率曲线的求法》。这部著作对几何学的发展具有重大意义，特别是为空间曲线论奠定了基础。克雷洛的才能和成就引起科学院某些成员的注意，他们提议选这位年轻人作为院士。按照科学院当时的规定，入选的院士不得小于20岁。科学院认为有必要打破常规，让这位年轻的数学家享有法国学术界最高荣誉。于是，经评议会研究一致同意授予年仅17岁的克雷洛为巴黎科学院院士的称号。

学术刊物在辨识和扶植人才方面往往起着特殊的作用。一份富有远见的学术刊物，不仅能够有效地交流和储存学术信息，而且还能起到发现和培养人才的作用。优秀的编辑应当善于独立思考，富于创新精神，不因人选稿，不怀任何偏见，特别应当注意给那些尚无名气的“小人物”以发表独立见解的机会。在数学史上就有不少杂志以善于扶植数学新秀而著称。

1826年，由德国工程师和建筑师克列尔(A. L. Crelle, 1780—1855)创办的《理论与应用数学杂志》(简称为《克列尔杂志》)，是历史最悠久的数学杂志之一。这个杂志以多次有眼力、有胆识地发表开创性的论文而在数学史上获得极高的声誉。例如，当挪威青年数学家阿贝尔的才能遭到埋没，他的开创性论文《论代数方程、证明一般五次方程的不可解性》没有得到应有的重视时，《克列尔杂志》于1826年在其第一卷

详细地发表了这篇论文，之后又在第二、三卷连续发表了阿贝尔20多篇有关方程论、无穷级数论和椭圆函数论等方面的重要论文。这就为学术界了解和发展阿贝尔的工作提供了重要信息。伽罗华就是通过《克列尔杂志》详细得知阿贝尔的工作，并继而发展他的方程论思想的。

再如，前面已讲过，十九世纪下半叶，德国青年数学家康托尔创立了集合论，在数学发展史上作出了划时代的贡献。然而，他的这一重大成果却遭到了以他的老师克隆尼克为代表的学术权威的压制。克隆尼克不仅大肆攻击康托尔的集合论思想，而且还极力阻挠康托尔学术论文的发表。正是在这种情况下，《克列尔杂志》不顾学术权威和保守势力的反对，于1874年大胆地发表了康托尔的学术论文，为集合论这一新思想的确立和传播开拓了道路。《克列尔杂志》由于善于识别和勇于支持数学发展中的新生事物，受到数学界普遍的赞誉。

在数学史上，象《克列尔杂志》这种乐于扶持新生事物的著名学术刊物并不在少数。例如，法国数学家刘维尔创办的《理论与应用数学杂志》（简称《刘维尔杂志》）就是这样的一个刊物。这个杂志于1846年首次发表了伽罗华的被数学权威长期压制的重要遗著《论方程的根式可解性条件》，刘维尔亲自作序向数学界推荐，此时伽罗华已去世14年。再如，1884年德国的《数学学报》第一卷发表了青年数学家彭加勒关于自守函数的第一篇论文。文章一发表就遭到数学权威克隆尼克的激烈反对，他警告编辑莱夫勒说，这篇不成熟和隐晦的论文会毁掉这刊物的声誉。可是，莱夫勒并没有被权威的偏见所左右，他按计划在前五卷中系统地发表了彭加勒关于自守函数的五篇重要论文。莱夫勒的这种作法，对自守函数理论的形成起到了积极的作用。又如，1930年上海《科学》杂志发表一篇纠正名教授错误的论文《苏家驹之代数五次方程式解法不能成立

的理由》。作者就是后来成为著名数学家的华罗庚，当时他不过是江苏金坛县一个自学数学的小店员。正是这篇文章，使得清华大学熊庆来教授有机会发现了华罗庚。我们在赞誉北京清华园里的伯乐精神的同时，还应当颂扬上海《科学》杂志编辑部同志们的伯乐精神。

伯乐精神的最可贵之处，在于善于发现和培养人才，然而伯乐也同样是人才，而且是更为可贵的人才。因此，要尊重、爱惜科学人才，必须尊重和爱惜科学伯乐。人们不会忘记在科学上作出伟大发现的那些卓越人物，同样不会忘记在人才发现和培养上作出伟大贡献的那些伯乐。

第十章 数学发展的相对独立性

——从非标准分析的产生谈起*

数学的发展是否具有相对独立性？如果具有相对独立性，应该如何认识？这是数学界和哲学界历来关注的一个问题。非标准分析的产生不仅为数学发展相对独立性的存在提供了新的证据，而且在表现相对独立性的形式和内容方面还给我们以新的启迪。

数学的发展依赖于社会实践，但这种依赖并非只是消极被动的和照像似的，而往往是通过曲折迂回的途径表现出来的。就是说，数学理论的发展就总体来说受着社会实践的影响和制约，然而这不等于说数学发展的每一步都是由社会实践直接推动的。特别是数学发展到一定阶段，已经积累了大量材料，并需要概括出新理论的时候，就会产生一些理论自身的矛盾，而解决这些矛盾的过程便导致了数学理论本身的相对独立的发展。正如恩格斯所指出的："数学是从人的需要中产生的；是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。但是，正如同在其他一切思维领域中一样，从现实世界抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西……而与现实世界相对立"。[1]

数学发展的相对独立性特点，曾经被历史上的一些唯心主义者歪曲利用来作为他们鼓吹"天赋观念"或"先验哲学"等

* 此部分是根据作者与王前同志合作论文改写而成的

1)《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35—36页。

等的"理论根据"。现代数学领域中的一些形式主义者，也谈数学发展的相对独立性，但他们却把它解释成为数学理论发展的任意性，认为数学理论是一种思维中的"纯粹的自由创造"。在他们看来，象微积分这样的数学理论，只要符合内部一致性的要求，就可以自由地采用自己的前提，自由地构成自己的定义。[1]无论是历史上的唯心主义者还是现代的数学形式主义者，在数学发展相对独立性问题上的看法都是错误的。恩格斯指出："甚至数学上各种数量的明显的相互导出，也并不证明它们的先验的来源，而只是证明它们的合理的相互关系。"[2]数学发展的相对独立性既不说明数学理论的先验来源，也不表示数学理论产生于形式上的纯粹的自由构造，而只表明它是以数学上各种量的相互导出具有合理性作为其理论根据的。这里所谓的"合理性"，指的是从现实的数量关系中概括出正确的前提，运用正确的逻辑方法，导出符合客观规律的数学理论。正如恩格斯所说："如果我们有正确的前提，并且把思维规律正确地运用于这些前提，那末结果必定与现实相符。"[3]

数学发展的相对独立性虽然表现为它与直接的社会实践相脱离，表现为数学"从理论到理论"的发展；但从总体上看，它仍然是遵循着"实践—理论—实践"这一辩证唯物主义认识论的基本规律的。正确的数学前提和正确的逻辑方法来自实践，并要受实践的不断检验。马克思说："人的思维是否具有客观的真理性，这并不是一个理论的问题，而是一个实践的问

1) 参见卡尔·B．波斯：《微积分概念史》，上海人民出版社，1977年版，第322页。
2)《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。
3)《〈反杜林论〉的准备材料》，《马克思、恩格斯全集》第20卷，人民出版社，1971年版，第661页。

题。"[1] 数学发展的相对独立性实质上是数学对于现实世界数量及其关系能动反映的体现。这种能动反映是否正确，最终是要由客观实践来验证的。实践同样是检验数学真理性的唯一标准。

数学发展的相对独立性主要表现在运用逻辑方法达到各种量的相互导出。这种导出既可以反映在某一数学分支内部，也可以表现在不同数学分支之间。而后一种情况比起前一种情况有着更为普遍的意义。非标准分析就是由不同数学分支彼此联系，相互导出而产生的。它的形成从以下几个方面加深了我们对数学发展相对独立性的认识。

一、计量数学与非计量数学相结合

从新理论的产生看，数学发展的相对独立性可以反映在计量数学分支和非计量数学分支之间的相互结合上。

数学的各个分支，可分为两大类：一类叫计量数学，它们可以进行数量关系的实际演算，如微积分、代数、几何、概率论与数理统计等学科；另一类叫非计量数学，它们不能进行数量关系的实际演算，如数理逻辑中的证明论、模型论以及算法语言等学科。计量数学各分支之间相互渗透产生新的分支，这种事情早有发生。如代数学与几何学相互渗透产生了解析几何学，微分学与几何学相互渗透产生了微分几何学，数学分析与拓扑学相互渗透产生分析拓扑学，等等。而计量数学和非计量数学相互渗透产生新分支，却出现得比较晚。非标准分析就是这方面的一个典型代表。

所谓非标准分析是相对于标准分析而言的。标准分析是

1) 《关于费尔巴哈的提纲》，《马克思恩格斯选集》第1卷，第16页。

指十九世纪后期由柯西、魏尔斯特拉斯等人严格化了的微积分理论，它的特点是在实数理论上建立其逻辑基础，排除了微积分产生初期使用的无穷小量。1960年，美国数学家鲁宾逊(A.Robinson,1918—1974)用数理逻辑之模型论的思想方法证明了无穷小量的存在，重新把无穷小量引入微积分，扩充了实数域，从而建立了非标准分析。我们知道，数理逻辑这样的非计量学科素来被看作与微积分这种计量学科缘分不大，但非标准分析却揭示了这两者之间的内在联系，从而进一步说明了数学各分支更加广泛地渗透和结合是推动数学相对独立发展的重要因素。德国著名数学家希尔伯特在本世纪初曾经说过："数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系。尽管数学知识千差万别，我们仍然清楚地意识到：在作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系，同时，在它的不同部分之间，也有大量相似之处。我们还注意到，数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且这门科学一向相互隔绝的分支也会显露出原先意想不到的关系。随着数学的发展、它的有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来。"[1]非标准分析的出现，有力地证明了希尔伯特这一重要思想是正确的。

非标准分析的产生说明，现代数学发展中各分支相互联系和影响的趋势逐渐增强，因而我们必须十分重视一个数学分支的成果和方法在其它分支的实际应用。很多数学难题长期得不到解决，往往是由于缺少合适的工具和方法。这些工具和方法常常不是在传统的探索范围内产生，而是来自另外的新天地。今天的数学进展是否已经为解决一批数学难题造就

1） 转引自C.瑞德：《希尔伯特传》，载《科学与哲学》，1979年第1期，第150页。

了合适的工具和方法，而人们还没意识到呢？如果人们展开更为广泛而丰富的联想和探索，注意各分支之间的渗透和联系，将会有新的、意料不到的更大收获。

二、冲破理论禁区

从思维的能动性看，数学发展的相对独立性往往体现为冲破理论禁区。

随着数学的发展，新的数学理论不断产生。而每一种数学理论都有自己的存在范围，范围之内是合理的和通行的，范围之外就成了理论禁区。然而，新的数学问题往往要超出原有理论的存在范围，这样就不断产生同原有理论的矛盾。因此，只有冲破禁区，扩展新的概念，才能解决矛盾，发展数学理论。比如，当人们对数的认识只限于整数范围时，便认为整数是合理的，加法、减法、乘法、乘方等运算是通行的。然而，由于存在不能整除的矛盾，所以分数则是不合理的，除法运算是不通行的（注意，这里所谓“通行”，指的是数学运算的封闭性）。也就是说，整数范围之外成了禁区。后来，为了解决不能整除的矛盾，使除法运算畅通无阻，便冲破了这个禁区，引入了分数这个概念，从而使人们对数的认识从整数域扩展到有理数域。同样，当人们的认识只限于有理数域时，由于出现开方开不尽的矛盾，所以无理数（即无限不循环小数）被认为是不合理的，数的开方运算是不通行的，即有理数域之外又成了新的禁区。后来为了解决开方开不尽的矛盾，使算术数的开方运算能够通行，再次冲破理论禁区，引入了无理数这个概念，于是又使有理数域发展为实数域。接着，人们在冲破更新的禁区，解决更新的矛盾过程中，把实数域发展为复数域，乃至超复数域等。

数域的发展是这样，非标准分析的形成也是如此。事实上，标准分析是建立在标准实数域上，而标准实数表现在数轴上则是一个“只有位置，没有大小，没有结构”的抽象的点。这样、“点有结构”就成了一个理论禁区。正是由于有这样的禁区，所以在标准分析中，象不同阶微分所表现出来的不同阶无穷小量，就无法在数轴上直观地反映出来，从而使得它很抽象，难于理解。而非标准分析恰恰是由于打破了传统观念，认为“点有结构”，并引入了“非标准实数”这一新概念，建立了单子结构模型，把标准实数域扩展为非标准实数域，这样便使得不同阶的微分清楚、直观地展布在非标准实数轴的不同层次的单子里面，从而解决了标准分析长期解决不了的矛盾，推动了微积分理论的发展。实际上，在非标准分析里，每一个实数周围都有无限多个无穷小量，我们把一个实数和它周围的无穷小量的全体称为一个“单子”(Monad)。每个单子里只允许有一个实数，叫标准实数，其余的无穷小量都叫作非标准实数。非标准实数在标准实数轴上是表示不出来的，只有在非标准实数轴才能表明其内部情况。

在非标准实数轴上，每个标准实数点都表示那里有一个单子，单子内部的结构用类似显微镜的方法表示出来，其中的数仍可按大小顺序展布在一个数轴上。这个数轴上的点还可以继续“放大”。用这种方法，可以清晰准确地表现各阶无穷小量之间的关系。高阶无穷小量存在于单子内部，舍弃它并不影响单子之外实数之间的关系，于是在微积分运算中舍弃高阶无穷小项就是完全合理的了。

非标准分析的极限概念可表述为：设L和C为实数。如果当$x\approx C$但$x\neq C$时，有$f(x)\approx L$，我们就说函数$f(x)$当x趋近于C时以L为极限。记号“$\approx$”表示其两边的数量相差一无穷小量。换句话说，极限的存在意味着，当x进入C的单子内

部，$f(x)$必须同时进入L的单子内部。

把数轴上的点看成单子，在单子内部考察极限过程，这是非标准分析的主要思想特色。在非标准分析出现之前，数学上的点通常被认为是不可分的。微分在很长时间内曾被认为是“不可分量”。莱布尼茨曾经提出“单子”概念作为其哲学思想的基础。他的“单子”也是不可分的。[1] 非标准分析却突破了“点没有结构”、“点不可分”的传统观念，把各阶微分同现实世界各个数量层次对应起来，进一步密切了微积分理论同它的现实原型的关系，大大增强了微积分的直观性、生动性。很明显，微积分理论正是研究不同数量层次之间关系的，它的实际应用足以说明这一点。然而，只有非标准分析第一次对“层次”概念作出了数学上的刻划。无论是牛顿、莱布尼茨、还是柯西、魏尔斯特拉斯等人，都是在一条实数轴上，或者说在一个数量层次上分析问题，因而很难把几个数量层次之间的关系，即各阶微分之间的关系说清楚。非标准分析的直观性、生动性比起牛顿、莱布尼茨的观点，并不只是程度上的增加，而是有着质的飞跃。牛顿、莱布尼茨的初级的微积分直观概念由柯西、魏尔斯特拉斯等人加以扬弃，柯西、魏尔斯特拉斯的极限理论又由鲁宾逊的非标准分析加以扬弃。第一次扬弃强调逻辑性，第二次扬弃重新强调直观性，但这种直观性与牛顿、莱布尼茨的直观性相比，已经达到了新的思想高度，因而对微积分理论的发展也有着更为重要的意义。

三、对象与方法彼此渗透

从对象与方法的关系看，数学发展的相对独立性，常常反

1） 参见〔美〕梯利：《西方哲学史》下册，商务印书馆，1979年版 第133-134页

映在这两者之间的彼此渗透和相互促进上。

数学的研究对象是表现为“思想事物”的纯粹的量。新的数学研究对象的发现与采用新的方法必然有着密切的联系。这种联系以及数学对象和方法的相互促进，是数学发展的一个重要动力，非标准实数这一数学对象的研究及其相应数学方法的运用就是一个很好的例证。只要把非标准分析的内容与标准分析的相应部分加以比较，就可以清楚地看到这一点。

首先看一看非标准实数域的基数问题。所谓基数，又叫“势”，是集合论中的一个重要的概念。它表示集合中元素的个数。对于无限集合来说，基数并不都是一样的。通过一一对应关系的比较，可以知道有些无限集合的元素多于另外一些无限集合的元素。比如全体实数的元素就多于全体自然数的元素。实数连续统的基数的意义，在于表示实数轴上全体点的多少。由于非标准分析扩充了实数域，把每个实数点变成包含无限多个无穷小量的单子，于是数轴上的点就大大增加了。这些新的“点”的出现，完全是采用模型论这种新方法所造成的。把标准实数轴上的点和非标准实数轴上的点作一一对应的比较，显然后者的基数大于前者。不仅如此，标准实数轴上的点从标准分析的角度看，是连续的、稠密的，所以叫做“实数连续统”。然而，从非标准分析角度看，实数域就变成不连续的了，无穷小量占据了标准实数点之间的空隙。一条直线作为数轴，看起来结构十分简单，深入分析起来却有无穷无尽的探索余地。它从标准分析的观点看是一个样子，而从非标准分析的观点看却是另一个面貌。

其次，再看一看非标准分析的单子“边界”问题。在标准分析中，“上确界存在定理”是一条十分重要的定理。这条定理可表述为：任何非空的、上方有界的数集都有上确界。所谓“上确界”，即指最小的上界。如果a是一个数集E的上确界，

那就是说，E中的所有元素都小于或等于a。如果有某个数比a还小，那就一定在数集E之中。上确界存在定理和与之等价的区间套定理、魏尔斯特拉斯聚点原则，是标准分析其它理论内容展开的基础。而这样一个重要定理在非标准分析中却变了样子。非标准分析的单子之间并无确界(包括上确界和下确界，下确界的定义用类似上确界的方法给出)。因为两个单子之间的边界不可能是一个实数，如果不是这样就会出现一个新的单子；两个单子之间的边界又不可能是一个无穷小量，因为每个无穷小量总是属于一个确定的单子。这样一来，我们就只能或是在单子内部考察量的变化，或是在标准实数轴上考察量的变化。如果这两个层次的变化情况都从标准实数轴上去理解，就说不上单子外部的量的变化是从什么地方进入单子内部的(这里实际上是经历了一个飞跃过程)。非标准分析的这些新性质，也是由它的新方法造成的。从前一个例子看，标准分析中没有的东西在非标准分析中却出现了；而从后一个例子看，标准分析中存在的东西在非标准分析中又化为乌有了。可见，数学方法对数学研究对象的作用是很大的。

承认数学方法对数学研究对象的作用，并不是否认数学研究对象本身的意义以及它对采取何种研究方法的影响。数学在发展过程中不断扩大新的研究对象，而对这种新对象的研究究竟采取哪一种方法，开始时往往带有某种偶然性。可是在深入了解新的数学发现的理论意义后，相应的方法也就随之不断完善化，专门化。标准分析的方法曾经长期限制着人们解决无穷小量实在性问题的可能性，这却促使人们转向寻找各种新方法。在寻找到用模型论的方法证明无穷小量这个研究对象的存在之后，才逐渐发现这个领域有许许多多新性质。新的研究对象的发现和新方法的发展是相辅相成的。

这是数学领域的普遍现象。研究捷线问题导致变分和泛函分析方法出现，研究高次方程根问题导致群论方法产生。数学越是进入高度抽象的领域，数学研究对象和方法的辩证统一关系就越加显露出它的重要性。

四、"标准—非标准"

从数学分支的演变形式看，数学发展的相对独立性有时表现为"标准——非标准"。

非标准分析的产生表明，数学理论由"标准"向"非标准"转化，即"标准—非标准"，是解决数学理论体系内部矛盾，推动数学发展的一个重要途径。我们知道，柯西、魏尔斯特拉斯的"标准分析"存在着过于抽象、缺乏直观性，运算起来复杂等问题和矛盾。鲁宾逊为了解决这些问题和矛盾，则对"标准分析"的内容实行"非标准化"，也就是将"标准"转化为"非标准"。比如，将"标准"的潜在无穷小量转化为"非标准"的实在无穷小量；将"标准"的实数域转化为"非标准"的引入无穷小量的实数域；将"标准"的极限方法转化为"非标准"的无穷小量分析法；将"标准"的复杂运算转化为"非标准"的简单运算等等。

在"非标准分析"产生之前，实际上就已出现过这种"标准—非标准"的演变形式。比如，如果把欧氏几何看作"标准几何"，那么非欧几何就是"非标准几何"，可见，"欧氏几何—非欧几何"体现了"标准—非标准；"如果把普通代数看作"标准代数"，那么布尔代数就是"非标准代数"可见"普通代数—布尔代数"体现了"标准—非标准"。在非欧几何与布尔代数产生的当时，并没有采用"非标准"这个提法，这说明当时的数学家们还只是在一个一个具体问题上实现由"标准"理

论向"非标准"理论的转化，尚处于自发的状态。后来，经过长期反复的实践，人们的认识逐步由个别上升到一般，行动不断地由自发转变为自觉。1960年，鲁宾逊创立了"非标准分析"这一数学分支学科。可以认为，这是他自觉实现"非标准化"的一种行为。在数学中自觉实现"非标准化"，是数学思想方法上的一个重大转折。深刻地认识这一点，自觉开展各数学分支学科"非标准化"的研究，必将促进数学理论相对独立的发展。

第十一章　马克思恩格斯与数学思想方法

一、马克思《数学手稿》的方法论意义

马克思的《数学手稿》，是历史上最卓越的一部数学哲学著作，是自然辩证法的珍贵历史文献。在这部著作中，马克思运用唯物辩证法的基本观点，考察了数学特别是微积分学思想的历史演变，揭示了数学某些内容的辩证实质，分析了方法的转化在微分学建立中的重要意义，总结了不同学术观点的论争对于微分学发展的积极作用。同时，马克思还借助比拟、想象等语言艺术，力图把抽象的理论形象化。马克思的这些思想和方法，对于我们进一步开展数学、自然科学及其哲学问题的研究，都有着深刻的方法论意义。

1. 考察科学思想的历史演变

马克思《数学手稿》的一个显著特征，是注重考察科学思想的历史演变，把分析科学思想的现状同考察它的历史结合起来，并从中探求科学思想发展的规律。这是《数学手稿》所提出的一个重要方法论原则，也是马克思运用唯物辩证法研究科学问题的一种基本思想方法。马克思的这一思想方法，突出地反映在他对微分学奠基思想问题的研究上面。

事实上，为了考察微分学奠基思想的历史演变，马克思做了大量工作。

首先，马克思尽一切可能收集、阅读有关文献资料，细心地作出内容提要和撰写札记。马克思曾写了三大本有关微分学问题的笔记，对牛顿的《自然哲学的数学原理》、欧勒的《无限分析引论》、《微分学基础》、穆瓦尼奥的《微分学讲义》、拉克罗阿的《微积分学》、布沙拉的《微积分学与变分学》赫明的《初等微积分学》、拉格朗日的《解析函数论》、达兰贝尔的《流体论》等在历史上影响较大的教科书和专著，在阅读的基础上，作了内容提要，对莱布尼茨、泰勒(B.Taylor,1685—1731)、马克劳林、兰登、辛德、泊松和拉普拉斯等著名数学家的微积分论著，也进行了认真的研读，写了许多札记。此外，马克思还查阅了许多有关数学史方面的著作，比如，对鲍波的《从最古到最新时代的数学史》一书，就从纯数学和应用数学两个方面作了系统的摘录。不仅如此，为了便于考察和研究，马克思还特地编了文献索引，就连自己的藏书和稿本也列入其中。由此可见，在微分学奠基思想问题研究上，马克思占有的文献资料是相当丰富的，正如1863年7月6日他在给恩格斯的信中所说的："有空时我在研究微积分。顺便说说，我有许多关于这方面的书籍，如果你愿意研究，我准备寄给你一本。"[1]

其次，为了便于从浩繁的文献资料中概括出微分学奠基思想历史演变的进程和规律，马克思还十分注意围绕一些具有重要认识论和方法论意义的问题，整理了专题资料，为深入探讨问题做系统的准备。比如，马克思曾集中收集和整理过：初等代数向微分学的转变是怎样发生的？牛顿二项式定理在这个转变过程中起了怎样的作用？有限多项式是怎样转化为无穷级数的？表达式$\frac{0}{0}$在代数学与微分学中有何区别？在

1)《马克思恩格斯全集》第30卷，人民出版社，1974年版，第357页。

代数学中以何种形式且在解决怎样的问题时遇到导数的原型等问题的专题资料。这些资料，对马克思研究微分学的历史演变，完成《论导函数概念》、《论微分》等论文的写作，起到了极其重要的作用。

第三，运用典型剖析和对比分析的方法，从哲学思想上对微分学历史不同阶段代表人物的微分方法进行仔细的鉴别和评述，从中概括出微分学奠基思想历史演变的进程和规律。在研究大量资料的基础上，马克思指出，微分学自十七世纪后半叶建立，到十九世纪初，从奠基思想来看，实际上经历了三个不同的历史发展阶段，即从牛顿、莱布尼茨为代表的"神秘的微分学"；以达朗贝尔、欧勒为代表的"理性的微分学"；以拉格朗日为代表的"纯代数的微分学"。在《数学手稿》中，马克思还结合这些代表人物，对这三个不同历史阶段的特点及其内在联系作了系统的分析和论述。

关于牛顿和莱布尼茨，马克思对他们在微积分的创立上所作出的巨大功绩给予了充分的肯定。同时，又批判地分析了他们思想方法的形而上学实质，指出，他们一开始就把变量的增量Δx当作微分dx，微分是"通过形而上学的解释假定的"（第85页）[1]；导函数"不是用任何一种数学方法推导出来的"（第98页），而是"通过解释预想出来的"（第85页）。也就是说，在他们那里导函数的算法"是基于在数学上根本错误的假设"，并"通过肯定是不正确的数学途径得出了正确的……结果"（第88页）。这就造成了微分学的神秘性。因此，马克思称这个阶段的微分学为"神秘的微分学"。

接着，马克思又详细地分析了以达朗贝尔和欧勒为代表的"理性的微分学"。其中，着重讨论了达朗贝尔的思想方法。

1）凡只注明页码而不注明出处的均引自马克思的《数学手稿》，人民出版社，1975年版。

马克思认为，达朗贝尔对牛顿和莱布尼茨的方法“作了基本的改正”（第88页），使得微分 dx 不再是预先假定的，而是“作为 Δx 发展的最后或至少是接近末尾的结果”（第88页）；在导函数推演过程中，原先被牛顿和莱布尼茨“用魔术变掉”的一些项，在达朗贝尔那里，却是“通过正确的数学运算”（第90页），便把它们取消了。因此，马克思称赞达朗贝尔“脱下了微分学的神秘外衣，取得了很大的进步”（第90页）。同时，马克思又指出，达朗贝尔的方法仍然打上了形而上学的印记，因为，他虽然“用严格的代数法”进行推理，但却是使一个“完全现成的导数”，“从它的其他联系中解脱出来”（第90页），这样做的结果，必然又引起“某些形而上学的恐怖”（第91页）。

最后，马克思还深入讨论了以拉格朗日为代表的“纯代数的微分学”。他指出：“拉格朗日的巨大功绩不仅在于用纯代数的分析方法给泰勒定理以及一般地给微分学奠定了基础，而且尤其在于引进了导函数的概念。”（第146页）从而给微分学提出了“本质上是新的支柱”（第148—149页）。同时又指出，拉格朗日把微分学最一般的概括性定理即泰勒定理，作为推演的直接出发点，实际上是在“以微分学的名字”给函数展开式中各项的系数进行“命名”，因而他“除了直接从达朗贝尔方法出发所能得到的东西以外，也没有得到什么”（第93页）。马克思还深刻指出，将微分学引到代数基础上的任务，之所以要等到拉格朗日来承担，这是由于“新事物和旧事物之间的真实的从而是最简单的联系，总是在新事物自身已取得完善的形式后才被发现”（第144页）。就是说，微分学的代数来源，只是在微分学发展到一定的阶段时，才能清楚地暴露出来。这就深刻地揭示了微分学奠基思想演变进程的历史必然性。

马克思自十九世纪五十年代开始，一直到1883年3月14日逝世为止，始终坚持微分学思想史的研究工作。1882年11月22

日，马克思在身患重病离逝世不到四个月的情况下，仍写信给恩格斯讨论微分方法的历史演变。他概括地指出，"微分方法本身的演变进程是始于牛顿和莱布尼茨的神秘方法，继之以达朗贝尔和欧勒的唯理论方法，终于拉格朗日的严格的代数方法"，[1]又说："以后有机会还要回过头来细谈各种方法。"[2]

马克思关于微分学奠基思想历史演变进程及其规律的分析和概括，是微积分思想史研究上的一项极其重要的成果，并有着深远的指导意义。马克思总结微分学史的思想方法，不仅为研究数学和自然科学发展史提供了重要的方法论原则，而且还对数学和自然科学的理论研究有着重要意义。这是因为，任何一个科学概念，一种科学理论，一门科学学科都有其产生，演化和发展的历史。它们的现状总是与其历史有着内在的联系。现在是历史发展的结果，又是预测未来的基础。要想真正地懂得现在并科学地预见未来，就必须了解过去的历史。列宁说："最重要的就是不要忘记基本的历史联系。考察每个问题都要看某种现象在历史上怎样发生，在发展中经过了哪些主要阶段，并根据它的这种发展去考察这一事物现在是怎样的。"[3]马克思根据自己的亲身体会也曾指出："研究必须充分地占有材料，分析它的各种发展形式，探求这些形式的内在联系。只有这项工作完成之后，现实的运动才能适当地叙述出来。"[4]事实上马克思就是根据历史与逻辑的统一这一辩证原理，通过考察微分学思想和方法历史演变的各种形式，概括其一般的发展规律，并进而揭示微分概念和运算的辩证实质的。

1）《马克思恩格斯全集》第33卷，人民出版社，1971年版，第110页。

2）同上。

3）《列宁选集》第4卷，人民出版社，1972年版，第43页。

4）《马克思恩格斯全集》第23卷，人民出版社，1972年版，第23页。

2. 用发展的观点揭示科学内容的辩证实质

用发展的观点揭示和阐述科学内容的辩证实质，是马克思《数学手稿》的又一个显著特征，也是马克思运用唯物辩证法研究科学问题的一种独到的思想方法。运用这种思想方法，可以将科学概念、理论和方法从唯心主义、形而上学等错误哲学观点的束缚下解放出来，使其置于正确哲学思想的基础之上。在微分学问题的研究中，马克思正是运用这一思想方法，彻底批判了历史上有关微分学奠基思想的唯心论和形而上学观点，在微积分发展史上第一次系统揭示了微分概念和运算的辩证法，给微积分理论提供了正确的哲学基础。马克思对微分学基本概念之一导函数生成过程的分析，就是典型的一例。

马克思认为，导函数是由原始函数经变数的运动、变化和发展而产生出来的，是对原始函数实行"否定之否定"的结果。在《论导函数概念》这篇论文中，马克思就是运用这种思想方法论述了几种具体函数的导函数的生成过程。

比如，对多项式函数$y=ax^3+bx^2+cx-d$

首先，让自变量x变化到x_1，因变量y随之变化到y_1，即

$y_1=ax_1{}^3+bx_1{}^2+cx_1-d$

从而

$$y_1-y=a\ (x_1{}^3-x^3)\ +b\ (x_1{}^2-x^2)\ +c\ (x_1-x)$$

作有限差之比

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=a(x_1{}^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)\ +a$$

然后，再让变量x_1变化到x；则有

$x_1-x=0$，$y_1-y=0$

于是，有限差之比变为

$$\frac{0}{0}=3\alpha x^2+2bx+c$$

用$\frac{dy}{dx}$代替$\frac{0}{0}$，最后得

$$\frac{dy}{dx}=3ax^2+2bx+c$$

从这个推演过程中，可以清楚地看到，导函数的产生过程确是一个“否定之否定”的辩证发展过程。对于这个过程，马克思认为，自变量x变化到x_1，即完成了第一个否定，因为通过这个否定，可作出变量的有限差之比，为下一个否定奠定了基础；在此基础上，再让x_1变化到x，即完成了第二个否定，并从而完成了由原函数到预备导函数，再到导函数这一“否定之否定”的发展过程。

马克思指出，首先取差，然后再把它扬弃，这并不是简单地导致无，而是带来了实际的结果。这个实际结果就是新的函数即导函数。理解微分运算的全部困难恰恰就在这里。

1881年，马克思将《论导函数概念》这篇论文的手稿誊清后寄给恩格斯征求意见。对此，恩格斯表现出极大的兴趣，“不仅考虑了一整天，而且作梦也在考虑它”。[1] 1881年8月18日，恩格斯在致马克思的信中，对马克思取得的这一研究成果表示由衷的祝贺，同时指出，长期被数学家们神秘化了的微分运算，在马克思那里竟是如此地清楚和明白，在这方面，马克思走到了所有数学家的前面。恩格斯还进一步阐述道，当函数完成由x到x_1的变化过程，“并带着该过程的全部结果之后”，再让x_1重新变化到x时，“这已不是原来的x，只是按名称

1)《马克思恩格斯全集》第35卷，人民出版社，1971年版，第23页。

来说还是变量x，它已经过了真正的变化，而且，即使我们重新把它本身抛弃，变化的结果仍保留着”。[1] 1882年11月21日，恩格斯在致马克思的信中再次指出，马克思的微分方法和老方法的根本差别在于：是使x“真正起变化”，[2] 而这个变化过程“是不可能用图象表示出来的”。[3]恩格斯还结合学习马克思的数学手稿，分析过去数学家们之所以把微分学“搞得神秘莫测”，其原因“不过是那些先生们的思想方法的片面性造成的”。[4] 恩格斯的这些论述，可以帮助我们更深刻地理解马克思的微分思想及其辩证实质。

马克思运用发展的观点对微分学概念和运算所进行的辩证分析，对于我们克服科学研究中的思想片面性和神秘主义，推动科学健康发展，有着重要的意义。事实上，我们知道，任何科学概念和理论，都是现实世界某一侧面或某一层次本质和规律的反映，而现实世界又充满着辩证法的发展过程，因此，科学的概念和理论也必然在本质上是辩证的。但是，由于科学发展水平的限制，旧传统理论观念的束缚和错误哲学的影响，科学概念和理论的辩证实质往往被掩盖起来，甚至被抹上一层神秘的色彩。这不仅在微分学中是这样，就是在其它学科的历史上也是存在的，诸如，在代数学中，说虚数是“介于存在与不存在之间的两栖物”，“神灵递迹的地方”（莱布尼茨）；在物理学中，把地球运转的切线力说成是“神的第一次推动”（牛顿）；在生物学中，把生命现象归结为某种神秘的“未知活力”（贝奇里乌斯），等等。马克思指出：“给科学撕下神秘的面纱是重要的”（第36页）。怎样撕下科学中的神秘面纱，还其科学的本来面目？马克思运用发展的观点揭示微分学概念

1）《马克思恩格斯全集》第35卷，人民出版社，1971年版，第23页。
2）、3）同上，第109页。
4）《马克思恩格斯全集》第35卷，人民出版社，1971年版，第21页。

和运算辩证实质的思想方法，无疑为我们在这方面作出了光辉的榜样。

3. 从方法的转化看新学科的出现

科学史表明，一个新学科的出现总是有其内在根据的，它往往与方法上的突破或向新方法的转化密切相关。马克思正是注意到了新学科产生的这个重要特点，才在《数学手稿》中以大量的篇幅，仔细论述了代数方法向微分方法的转化及其在微分学建立上的重要意义。他指出，只是当代数方法完成了向微分方法的转化时，微分学本身才“作为一种完全独特的、专门的变量的计算方法而出现”(第36页)。同时还进而指出，这种方法上的转化和符号微分系数作用的改变有着直接的联系。

在《论微分》这篇论文中，为揭示代数方法向微分方法的转化与符号微分系数作用改变的联系，马克思从函数$y=f(x)$和$y=uz$(u和z是两个依赖于自变量x的函数)的导函数运算等式出发，对照分析了符号微分系数在两个等式中的不同作用。他指出，在函数$y=f(x)$的导函数等式$\frac{dy}{dx}=f'(x)$中，符号微分系数$\frac{dy}{dx}$与实在微分系数$f'(x)$有着“形影不离”的关系，它作为$f'(x)$的“特有符号表达式”、“化身或符号等价物”，即作为象征性符号而出现在$f'(x)$的对面。就是说，这里$\frac{dy}{dx}$仅仅起着象征性符号的作用。而在$y=uz$的导函数运算等式$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$中，虽然$\frac{dy}{dx}$仍然扮演着符号等

价物的角色，但是$\frac{du}{dx}$和$\frac{dz}{dx}$却完全不同了，它们不再是分别处于实在微分系数的对面，而是"出现在导数本身的内部"（第29—30页），并且象"影子离开了投下影子的物体"那样离开了实在的微分系数。于是，符号微分系数的作用在这里发生了质的变化。马克思在关于微分的三份论文中指出。这种变化主要表现在：第一，它们不再是作为对实际的x的函数进行微分运算的符号结果而出现，而是"与变量一样，本身又成为推导中的有内容的元素，成为微分运算的对象"（第59页）；第二，"问题的提法颠倒过来了，不是求实在的微分系数〔$y'(x)$〕的符号表达式，而是去求符号表达式的实在微分系数"（第59页）；第三，它们不再是单纯的象征性符号，而是反过来"表明对实际的x的函数有待进行的微分运算，就是说它们成了运算符号"（第59页）。马克思认为，当符号微分系数行使这些新的职能，成为"独立的出发点"的时候，"代数方法就自行转化为与它对立的微分方法了"，微分学也就随之"成为一种特殊的计算法，它已经在自己的领土上独立地行动了"（第30—31页）。

马克思关于符号微分系数作用的逆转及其与方法转化、微分学建立关系的这种辩证分析，在微分学史上是从来没有过的。这是马克思在微分学奠基思想问题上的独到见解。事实上，在马克思之前，"不容置疑，数学家中未尝有人注意到这种转换，这种作用上的逆转。尤其没有人用一种完全初等的微分等式来证实这种转换即作用上的逆转是必要的"（第56页）。马克思从方法上的转化看新理论。新学科建立的这一思想方法，对于数学和自然科学研究有着深刻的方法论意义。科学史表明，方法上的突破或向新方法的转化，是推动科学发展的重要内在因素，也是建立新学科的关键之所在。数学诸分支学科的形成就充分说明了这一点。比如，几何学的综

合方法向代数方法以及向分析方法的转化，分别导致了解析几何和微分几何的建立；必然因果性方法向或然因果性方法的转化，促成了概率论与数理统计的诞生；分明集合方法向模糊集合方法的转化，开辟了模糊数学这一广阔的研究领域；手工证明方法向机器证明方法的转化，出现了机械化证明这一引人注目的数学新天地，等等。从某种意义上说，没有方法上的不断突破和不断转化，就没有今日纷繁众多的数学分支学科，也就没有现代数学的蓬勃发展。

4. 总结不同学术观点论争的积极作用

在科学的各个领域中，经常存在着不同理论、观点和学派之争。它们的不断解决和不断产生，推动着科学不断向前发展。马克思十分重视科学领域内部的这种矛盾运动。在对微分学的历史考察中，他分析和总结了不同观点论争的积极作用。比如，在谈到牛顿和莱布尼茨的"神秘微分学"产生后所引起的各种论争时指出："于是，人们自己相信了新发现的算法的神秘性。这种算法通过肯定是不正确的数学途径得出了正确的(尤其在几何应用上是惊人的)结果。人们就这样把自己神秘化了，对这新发现评价更高了，使一群旧式正统派数学家更加恼怒，并且激起了敌对的叫嚣，这种叫嚣甚至在数学界以外产生了反响，而为新事物开拓道路，这是必然的"(第88页)。数学史表明，微积分理论确是在各种不同观点论争的推动下逐步完善起来的。

众所周知，微积分理论一问世，围绕着它的逻辑基础问题就展开了热烈的争辩。当时几乎所有著名的数学家都卷进了这场论战。绝大部分数学家对这一数学领域中的新生事物，给予了热情的支持和扶植。为克服微积分基础理论中的逻辑缺

陷，他们提出许多独到的见解，并由此形成各种不同的、甚至互相对立的观点。例如，对于微积分的最基本概念无限小量究竟是什么这个问题上，泰勒、欧勒等人强调它达到零的一面；洛宾斯，达朗贝尔等人强调它具有非零的一面；而兰登、拉格朗日等人则干脆采取回避它的作法。与这些人不同，也有少部分“旧式正统派数学家”，囿于传统数学观念，对微积分理论中的逻辑缺陷百般挑剔，横加指责，并且极力把它从数学中取消掉。法国科学院院士、数学家罗尔就是其中的一个典型。他抓住某些微积分问题可以用代数方法来解决这一特殊情况，力图否认微积分方法的普遍性，认为无须引入微分这种“含混不清”的概念。他甚至公开指责微积分“破坏了”数学的严密性特征，带来了“不正确、不可靠”的论断，因而应当把它从数学领域中驱逐出去。

在数学界以外，特别是在哲学界，微积分的出现同样引起了强烈的反响。由于微积分“本质上不外是辩证法在数学方面的运用”[1]，它的思想和方法本身就带有新世界观的萌芽，触犯和动摇了宗教神学的理论基础，因而必然招致宗教势力和各种唯心主义者的反对。英国大主教、主观唯心主义者贝克莱可谓是其中最突出的一个。他极力歪曲，夸大微积分理论的逻辑缺陷，说什么微积分中“充满着空虚、黑暗和混乱”，无限小量是“逝去了的量的鬼魂”，“分明的诡辩”，等等，并借以为宗教神学辩护。

这些争论，从不同的角度促进了微积分逻辑基础的改造和建设工作，成为微积分向前发展的重要力量。事实证明，就是因循守旧者的非难和唯心主义者的攻击，对微积分的发展也并非是无益的。他们虽然没有也不可能给微积分逻辑基础严密化工作提出任何合理的意见，但正是由于他们的歪曲和

1）《马克思恩格斯全集》第20卷，人民出版社，1971年版，第147页。

反对，就更加促进了人们对微积分逻辑基础的深入探讨和研究。

纵观科学的历史，几乎没有一个重大理论不是在争论中建立和完善起来的。比如，在数学中，非欧几何是在围绕"试证欧氏第五公设"问题所展开的二千多年的漫长论争中孕育和产生出来的，而它自十九世纪二十年代由罗巴切夫斯基等人创立后，又经历了近半个世纪的激烈争辩，直到1868年贝特拉米给出它在欧氏空间拟球面上的直观解释，才开始获得数学界的一致承认和普遍赞美。在物理学中，关于光的本性的认识，从十七世纪开始就形成了以牛顿的微粒说和惠更斯的波动说为对立双方的两个学派。经过近三个多世纪的对峙和反复论战，结果导致爱因斯坦于1905年提出光量子学说，揭示了光的波粒二象性，从而克服了两派各自在认识上的片面性，使人们对光的本质取得了比较全面的认识。在化学中，关于燃烧的氧化学说，是拉瓦锡借鉴燃素派的实验资料，并在回答燃素派的责问中逐步确立和发展起来的。在生物学中，生命的种生说同自然发生说进行了二百多年的反复较量，才驳倒对方并由假说发展成为科学理论。在天文学和地学中，历来学派众多，假说林立，其争论更为明显和普遍，有些争论已经延续了几个世纪，至今仍然未见分晓。而天文学和地学的每一次重大进展都无一不是得益于争论的力量。在现代自然科学的各个前沿领域，同样是呈现着一派生动活泼的争论景象，许多重大课题的研究，诸如巨大尺度的天体结构，量子力学的物理和哲学意义，生物进化的机制，人造生命的前景，人工智能模拟的可能性，信息的本质等，也都正在各种观点、理论和学派的论争中深入开展着。

无数事实告诉我们，"真理是由争论确立的"[1]。这是真理

1)《马克思恩格斯全集》第一卷，人民出版社，1956年版，第567页。

发展的规律，也是自然科学发展的规律。实际上，通过学术争鸣，一方面可以披露谬误，抛弃错误观点，发展正确的科学思想，另一方面，也可以不断地用比较全面、更加深刻和更为普遍的认识来代替片面、表面和局部的认识，从而把人们对自然界本质和规律的认识不断推向新的阶段。毛泽东同志曾明确指出："百花齐放，百家争鸣的方针，是促进艺术发展和科学进步的方针，是促进我国的社会主义文化繁荣的方针"[1]。建国以来正反两方面的经验充分证明了这一论断的正确性。因此，要繁荣科学事业，就必须在学术上大力提倡自由讨论，积极开展百家争鸣。

5.把抽象的理论形象化

把抽象的理论形象化，把严谨的逻辑论证和完美的语言艺术结合起来，是《数学手稿》在写作上的一个鲜明特色，也是马克思表述科学问题的一种独特风格。从《数学手稿》中可以看出，马克思在抽象的数学问题研究中，十分讲究语言艺术，经常借助具有浓厚文学情调的语言来描述数学概念、运算的实质及意义，以增强其感染力，使人读后理解透彻、印象深刻。

首先，马克思在《数学手稿》中大量使用比拟这一语言艺术手段，以十分贴切而又风趣的语言，把抽象的数学概念和运算人格化，剧情化。比如，在论述导函数和原函数的关系时，马克思把导函数比拟为"孩子"，把原函数比拟为"母亲"、"先辈"，以此说明"'导数'只是相对于由之出发的原函数而言才是导来的"(第162页)；再比如，为深刻揭示达兰贝尔等人微分学思想的实质，马克思把表达式 $x_1=x+\Delta x$ 中的 x 比拟

1)《毛泽东选集》第五卷，人民出版社，1977年版，第388页。

为"怀孕前的母亲"，把 Δx 比拟为"在其怀孕前的母亲身旁的胎儿"（第105页），以加深人们对微分学老方法形而上学实质的认识。最使人感到赞叹的是，马克思还独具风格地用政治上的关系来比拟数学中的关系，比如，在阐释函数（*Funktion*）一词的意义时写道："这里y就叫做x的函数，因为它必须服从x的命令，正如象每个官员（*Funktionär*），甚至于伟大的威廉一世，也要依从某个人一样"（第190页）。这里的"某个人"是指当时德意志帝国的宰相俾斯麦，皇帝威廉一世一切都听从于他。这种比拟方法新颖独特，寓意深远，在数学论著中是难以寻见的。类似的形象化语言，在《数学手稿》中比比皆是，比如，"用魔术变掉"（第85页），"用暴力镇压掉挡路的一些项"（第86页），"通过了一次政变"（第125页），"节日盛装"（第39页），"矫揉造作的乔装打扮"（第173页），"走过了通往0的地狱之路"（第101页），"影子"和"投下影子的物体"（第30页），"蹦出了它的化身"（第26页），"以胚胎状态存在"（第123页），"给科学撕下神秘的面纱"（第139页）等等。

其次，马克思还十分重视想象在数学问题研究中的作用，常常借助丰富的想象提出一些具有珍贵科学价值的思想。比如，在论述微分方法的几何意义时，就极富想象地把微分三角形描述为"比点（*Punkte*）还小"的东西，并进而指出，对微分三角形斜边的性质也可"赋予幻想"（第24页）。马克思的这种"点中有形"的思想，有着重要的方法论意义。现代数学新领域非标准分析的建立，从某种意义上说，就是马克思这一创造性思想的佐证。

马克思在数学问题研究中，力图把抽象的理论形象化，在严谨的逻辑论证中辅之以生动活泼的语言，这对我们广大数学和自然科学工作者撰写科学论著，阐释科学问题来说，从表述方法上提供了重要启示。应当看到，过去我们有些数学和

自然科学工作者，往往在论述科学问题时，忽视语言艺术，因而论著中语言贫乏，叙述单调、呆板，使人读起来感到枯燥、费解。这一方面是由于这些数学和自然科学工作者不大重视把抽象的理论形象化；另一方面也是由于这些搞数学和自然科学的同志缺乏必要的文学素养和形象思维能力。因此，学习马克思的《数学手稿》，就要学习马克思在阐述科学问题上讲究语言艺术的写作风格，不断提高文学素养，自觉培养科学研究中的形象思维能力，以适应现代科学发展之文理相互渗透的需要，推动科学研究不断深入。

二、恩格斯《自然辩证法》中关于数学无限的现实原型的思想

1.无限大、无限小和微积分的现实原型

（1）无限大与无限小的现实原型。我们知道，几何学从空间关系出发，算术和代数是从数量出发，这些数量与地球的关系相适应，即适应于存在地球上的力学称之为质量的物体的大小。与地球上物体相比，地球的质量和半径显得是无限大。事实上，“地球半径等于无限大，这是考察落体定律时整个力学的原则。”[1] 但对银河系来说，地球乃至整个太阳系的质量、半径又成为无限小的了。同样，物体与组成它的分子、原子相比，物体的质量、半径又成为无限大，分子、原子成为无限小了。于是，物质的不同原型可得到一次无限、二次无限以及更多次的无限，从而说明数学中的无限（包括各次无限）确实存在着现实原型。

1） 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社，1971年版，第245页。本节中凡只注明页码的均引自此书。

（2）微分与它的变数性质的现实原型。我们知道，力学所研究的物体，都是由分子组成的。分子与物体相比，是一个非常微小的量。"虽然如此，分子还是具有有关质量所特有的一切性质、它在物理方面和化学方面都可以代表质量"（第246页）。分子和相应的称之为质量的物体具有完全同样的特性，"如数学上的微分和它的变数一样"（第246页）。虽然微分dx和它的变数x比较起来，是一个非常微小的、甚至趋于消失的量，但微分和相应的变数具有完全同样的特性。微分可当作实数同变数一样进行运算。唯一的差别就在于：在数学的抽象中，"似乎是神秘的和无法解释的东西"（第246页），而在自然界中，"却是不证自明的"、"一目了然的"（第246页）。

（3）数学上微分所使用的方式和所依据的规律的现实原型。这里，恩格斯以硫磺立方体所凝结的分子状况为例说明x^3的微分为$3x^2dx$。

一个硫磺立方体，把构成一个角的三面遮盖起来，其余露在外面，这个立方体的边长为x，放在硫磺蒸汽中降温冷却，使硫磺蒸汽在所露的三面上凝结，并假定凝结一个分子厚的一层，则所增体积为：

$$(x+dx)^3-x^3=3x^2dx+3xdx^2+dx^3。$$

在数学的抽象中，$3xdx^2$和dx^3同无限小$3x^2dx$比较起来，分别是二级和三级无限小，可以略去。因此，立方体的容积增加了$3x^2dx$。而在自然界中，对于硫磺立方体，严格地说来在边长为dx的立方体dx^3这一空间中，不能容纳两个或三个分子而只能容纳一个直径为dx的分子，分子"可以代表质量"，一个分子的质量记为dx；同样，容积$3xdx^2$中能容纳$3x$个分子，质量记为$3xdx$，容积$3x^2dx$中能容纳$3x^2$个分子，质量记为$3x^2dx$。因此，硫磺立方体的质量增加了$3x^2dx+3xdx+dx$，又因为$3xdx$和dx所代表的质量与$3x^2dx$相比是很

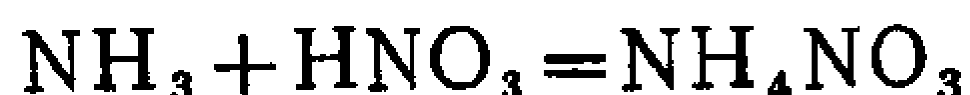
微小的，亦可略去。这样，这个硫磺立方体的质量便增加了$3x^2dx$。对硫磺立方体的空间形式加以数学抽象，那么，其中dx就成为一个"线"量，这种没有厚和宽的抽象的"线"，在自然界中是不能独立存在的，而只有在纯数学中才是无条件有效的。所以，恩格斯说："自然界运用这些微分即分子时所使用的方式和所依据的规律，完全和数学运用其抽象的微分时的方式和规律相同。"（第246页）

（4）微积分过程的现实原型。关于微积分过程的现实原型问题，恩格斯举了三个例子加以说明。

①水的蒸发，是从上面一层层蒸发，而每蒸发一层就使水的高度(x)减少一个分子(dx)的高度。因此，水连续蒸发的过程，从数学角度看就是连续微分的过程。反之，受一定压力和冷却，一层层凝结为冰，这又是一种真实的积分，它与数学上积分的不同之点只在于，前者是无意识进行的，后者是有意识完成的。

②物体运动由于碰撞而停止，动能转化为内能，转变为分子的运动，这正是物体运动被微分。反之，水蒸汽分子运动在汽缸中举起活塞，这正是分子运动被积分的过程。

③在考察物体的化学变化和化学性质时，通常是就其与物体相比为无限小的微分量的原子和分子(分子和原子是同次量)来进行研究。化学变化过程是分子分解为原子和原子重新组合成分子的过程。而表示这一过程和这一过程中量的关系是化学方程式，其中出现的是物体的分子，如：



$$NH_3+HNO_3=NH_4NO_3$$

这里，NH_3，HNO_3，HN_4NO_3依次是氨、硝酸、硝酸铵的分子。他们和方程一起表示物体的分子组合和化学变化中量的关系。分子与它们物体比较是一个非常微小的量，这种关系与数学上微分同变数的关系是一样的。所以恩格斯指

出："表示物体的分子组合的一切化学方程式，就形式来说是微分方程式"(第247页)。另外，在化学中所要计算的是，化学反应中反应物之间或反应物与反应产物之间的量的关系，而计算的依据就是化学方程式。但由于出现在化学方程式中的分子以及原子的重量十分微小，计算起来很不方便，因此，人们引入了一种所谓相对的原子量，即取"碳12"(C^{12})原子的实际重量的$\frac{1}{12}$作为原子量的"碳单位"，于是便得到碳的原子量为12，氧的原子量为16，氮的原子量为14，氢的原子量为1.008等。这样就把微小的量转化为有限的量了。这种有限量可以看作微小量积分的结果。正象恩格斯所说："这些方程式实际上已经由于其中所表示的原子量而积分起来了"(第247页)。不仅如此，在实际中，化学正是利用这种相对的原子量(及分子量)，依据化学方程式对化学反应过程中量的关系进行计算。而这些化学方程式又是表示物体分子之间的量的关系，即数学上的微分形式，因此，"化学所计算的正是量的相互关系为已知的微分"(第247页)。

2.无限数量关系的"层次"思想及其哲学意义

恩格斯在《自然辩证法》中论及微积分以及"无限"的现实原型时指出："物质是按质量的相对的大小分成一系列较大的、容易分清的组，使每一组的各个组成部分互相间在质量方面都具有确定的、有限的比值，但对于邻近的组的各个组成部分则具有在数学意义下的无限大或无限小的比值。"(第248页)恩格斯这里所说的各个"组"，实质上就是物质的不同数量层次。他的论述不仅适用于物质的质量层次关系，也适用于更加普遍的层次关系。事实上，凡是涉及"无限"的数量关系，

都是自然界各种不同数量层次之间关系的合理的数学抽象。比如，谷堆中的一粒谷子、人体中的一个细胞等，实际上并非无穷小量，但要把它们同整个谷堆、整个人体相比较，从数量关系上看，由于它们分属于不同数量层次，所以就表现为无穷小量了。数学中的无穷小量概念就是从这样一些实际现象中抽象出来的。因而，无穷小量就成为反映现实世界中各种不同数量层次关系的一种科学的概念。而从某种意义上讲，微分就是无穷小量，因此微分概念必然能够正确反映现实世界中各种不同数量层次关系的一些性质。事实上，同阶微分(同阶无穷小)之间正是有限的比值，不同阶微分(不同阶无穷小)之间正是无限的比值。

恩格斯还指出："只要数学谈到无限大和无限小，它就导入一个质的差异，这个差异甚至表现为不可克服的质的对立"(第236页)。因为不同数量层次之间存在着无限的关系，而微分又是不同数量层次关系的反映，所以不同阶微分之间存在着质的差异。当人们进行微积分运算时，实际上实现了事物从一个数量层次到另一个数量层次的质变。这种质变是经历了一个无限的变化过程才发生的。比如，圆的半径趋于无穷小，也就是对它进行微分时，它就变成一个点了。又如梯形的一边之长变为无穷小，即进行微分时，梯形就变成三角形了。无论由圆变为点，还是由梯形变为三角形，都是一种质的飞跃。数学运算是这样，现实生活中也是如此。比如地球表面本来是球面，但当人们测量范围足够小时，就可以把所测曲面当成平面。地球表面上所有铅垂线本来都指向同一个中心——地心，但是当我们考察范围足够小时，就可以把两条铅垂线看成是彼此平行的。可见，这里也必须从无限变化的角度来认识问题。

恩格斯关于无限数量关系的层次思想，为全面理解量变

质变规律提供了可靠的数学根据。我们知道，量变质变规律是辩证唯物论的一条重要规律。“量”这个范畴，不仅包括有限的数量，而且也应包括无限的数量。人们比较熟悉的是，某种物质运动形态经历一个有限的变化过程，在一个特定数量界限(即“关节点”)上产生质变。比如水到了100°C就会沸腾，金属达到其熔点就会熔化等。但是，量变经历一个无限的过程能否发生质变？如果说能发生，又是怎样发生的呢？这些问题就不像考察有限过程时那样简单和易于理解。事实上，事物经历有限变化过程发生的质变与经历无限变化过程发生的质变是有很大区别的。首先，前者一般说来是在一个数量层次内部发生的，后者则是在不同数量层次之间发生的。其次，前者是在具体物质运动形态的变化中完成的，是可以直观地加以认识的，而后者却往往要用抽象的理论思维加以把握。因为在感性世界里，谁也不可能实际完成无穷的运算步骤。数学上的直觉主义者否认无限过程可以认识。他们认为只有直观上可以把握的、运用有限步骤能够实现的数学对象才是存在的，可以运算的。直觉主义者在直观的数学对象和抽象思维之间划出不可逾越的鸿沟，这是不合适的。感性世界里完成不了的事情，不等于抽象思维不能把握。在抽象思维中完成无限变化过程的质变，恰恰是对具体物质运动形态变化的一种能动反映。正是由于这种能动的反映，才使我们获得了对物质不同数量层次之间关系的更准确、更深刻的认识。

哲学上所说的“度”，是事物保持一定质所需要的数量界限。我们知道，经历有限变化而产生质变的“度”，是一个有限区间。然而，经历无限变化而出现质变的“度”，却不能简单地说成是一种“无限”区间。不同数量层次之间质的界限并非不确定，因为“层次”本身，或者说微分的“阶”数是确定的。在这里，“层次”实际上起到了“度”的作用，它是一种特殊的“度”。

“层次”可以作为判断有限还是无限的参照系。某一数量层次中的一个有限的量，从其上一个层次来看是无穷小量，而从其下一个层次来看却是无穷大量。“有限”和“无限”通过层次关系而互相转化。当一个层次里的有限数量被微分时，经历了一个无限变小的过程，就转化为下一层次的“有限数量”。从这个意义上讲，微分确又不能简单说是无穷小，它体现了有限和无限的对立统一。

从“层次”关系的角度说明微积分的现实原型，确实能深刻地反映出微积分理论同现实世界中数量关系变化的内在联系。然而，不同阶微分所反映出来的“层次”关系，在标准实数轴上却难以直观地加以清楚的表述。dy、d^2y、d^3y分别表示一阶、二阶、三阶微分。它们之间有质的区别，但在标准实数轴（指一般实数轴）上却无法作出直观的几何解释。因为标准分析（指一般微积分）是把不同层次都重叠在一个轴上的。这里就出现了一个问题。设原函数为$y=f(x)=x^3$。由于$\frac{dy}{dx}=f'(x)=3x^2$，所以$dy=3x^2dx$。对$\frac{dy}{dx}=3x^2$再求一次导数，$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=6x$。故$d^2y=6xdx^2$。这里$dx$、$dy$属于一阶微分的层次，而$d^2y$、$dx^2$属于二阶微分的层次。但从导数来看，等式的左端，即符号微分系数$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$是有明确区别的；而等式的右端，即$3x^2$和$6x$则看不出是属于不同的数量层次。怎样解释这个问题呢？从“层次”关系来说明，这意味着当我们求导函数时，就已经由普通的数量层次过渡到一阶微分的层次中去了。导函数是一阶微分层次中dy与dx之比。正因为dy与dx处于同一层次，d^2y与dx^2处于同一层次，所以它们的比

值才都是有限的。同是有限比值，但它们分别表示不同层次中的数量关系，两者的质的区别要由符号微分系数$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$的区别才能看出来。可是，从标准分析的理论角度说明，由于只有标准实数轴这一个层次，所以只好说导函数是实数域上数与数之间关系，是一种不涉及实际内容的形式运算。我们运用这种形式运算由$y=x^3$导出了$\frac{dy}{dx}=3x^2$，等式的左端符号只表示我们进行了一次求导运算，右端是运算的结果。至于$\frac{dy}{dx}=3x^2$还可以继续求导，只是因为$3x^2$还是一个有限数量而已。而dx、dy以及$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$有什么质的区别，这种区别如何在几何上直观地表示出来，标准分析是难以解决的。标准分析中存在的这些问题，在非标准分析中得到了较好的解决。

在非标准分析中，将新实数域中一个单子"放大"之后，单子内部的数仍可按顺序逐一展布在一个数轴上。这个数轴除了其"层次"与单子外面的标准实数轴不同外，其余的性质没有什么差别。因此，当x和y的变化都进入了单子内部(即变成了dx和dy时)，$\frac{dy}{dx}$完全可以是一个一阶微分层次有限的数量。单子中数轴上的点还可以继续"放大"，因而我们还可以有更高阶的导数和微分。非标准实数轴严格说来并不是一条数"轴"，而是一个有着"层次"结构的空间。单子内部的"世界"和单子外部的"世界"都是这个空间的组成部分，然而它们并不是单纯从量的角度组合在一起，而是体现了不同数量层次之间的质的差异。由于不同数量层次关系是现实世界中一种普遍的数量关系，所以非标准分析的单子模型对于丰富有关"空间"观念的认识是很有启发意义的。根据非标准分析的单子

模型，对单子的每一次"放大"都对应于改变一个数量层次，或改变了一阶微分。由单子外部进入单子内部反映着不同数量层次之间发生了质变。单子内部都是无穷小量，它们只是相对于单子外面的普通实数域来说是质的差异，而它们之间仍然是量的差异，它们之间的比值是有限数量。它们在运算性质上同单子外面的普通实数域没什么区别，因而可以重新成为微分运算的出发点。单子模型使微积分理论本身的结构同它所反映的现实世界不同层次数量关系一致起来了。它使哲学上的量变质变规律对于涉及"无限"变化的数量关系的说明，有了稳固的数学基础。这样，我们就可以从微积分的现实原型，即应用实例方面深入理解恩格斯所提出的"层次"观念在量变质变规律中的意义。

不仅如此，非标准分析单子模型的性质，还为深入理解量变质变规律增添了新的内容。单子内部存在的无穷小量，不管自身连续累加多少次（只要是有限次），所得的结果都不会是一个新的实数，不会跑到单子外边去。单子模型的这种性质意味着，无穷小量的有限积累，也是不会发生质变的。只有经过无限次的积累，即经历一个无限变化的过程，才能发生质变。可见，非标准分析为量变质变规律在"无限"领域中的具体表现，提供了合理的数学模型。

总之，量变质变规律对于涉及"无限"的数量关系变化，也是完全适用的。只不过在表现方式上，有其特殊性罢了。这种特殊性主要表现在：第一，有限的数量关系变化在某个有限的数量界限上发生质变，无限的数量关系通过不同数量层次发生质变；第二，有限的数量关系变化是可以直观地加以认识的，无限的数量关系变化往往要运用理论思维工具加以把握；第三，"层次"是事物经历无限变化发生质变的"度"，它对应于各阶微分（各阶无穷小）。

主要参考书目

〔1〕 李俨:《中国算学史》,商务印书馆,1937。
〔2〕 钱宝琮:《中国数学史》,科学出版社,1964。
〔3〕 李　迪:《中国数学史简编》,辽宁人民出版社,1984。
〔4〕 梁宗巨:《世界数学史简编》,辽宁人民出版社,1980。
〔5〕 斯科特:《数学史》,商务印书馆,1981。
〔6〕 A.Д.亚历山大洛夫等:《数学——它的内容、方法和意义》,第一卷,第二卷、第三卷,科学出版社,1984。
〔7〕 M·克莱因:《古今数学思想》,第1册—第4册,上海科学技术出版社,1979—1981。
〔8〕 L.A.斯蒂恩:《今日数学》,上海科学技术出版社,1982。
〔9〕 P.D.库克:《现代数学史》,内蒙古人民出版社,1982。
〔10〕 鲁又文:《数学古今谈》,天津科学技术出版社,1984。
〔11〕 徐利治:《数学方法论选讲》,华中工学院,1983。
〔12〕 B·波斯:《微积分概念史》,上海人民出版社,1977。
〔13〕 康斯坦西·瑞德:《希尔伯特》,上海科学技术出版社,1982。
〔14〕 《数学史译文集》,上海科学技术出版社,1981。
〔15〕 傅世侠主编:《科学前沿的哲学探索》,辽宁人民出版社,1983。
〔16〕 D.J.Struik, A Concise History of Mathematics, New York, 1948.
〔17〕 И.Делман, Цзистории Математики, Детгиз, 1958.
〔18〕 Б.В.Болгарский, Очерки Ло истории Математики, 1979.
〔19〕 Розенфельд, История, неевклидовой геометрии, М·1976.
〔20〕 В.Ф.каган, Лобачевский, ИЗД.АНСССР, 1948.
〔21〕 刘风璞等:《数学若干辩证内容简析》,人民教育出版社,1980。
〔22〕 解恩泽邵福林:《马克思、恩格斯与科学技术》,吉林人民出版社,1983。
〔23〕 解恩泽主编:《科学蒙难集》,湖南科技出版社,1986。
〔24〕 朱新民主编:《科学史上的重大争论集》,湖南科技出版社,1986。

人 名 索 引

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学思想方法纵横论
作者＝解恩泽，赵树智编著
页数＝２３９
ＳＳ号＝１００６８２５３
出版日期＝